
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LÉVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ, H. RESAL.

TOME SEPTIÈME. — ANNÉE 1891.

25472
14/12/92

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes;

Par M. Albert RIBAUCOUR,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Draguignan, 30 mai 1876.

INTRODUCTION.

1. *Origine de la théorie des surfaces.* — La théorie des surfaces étend de jour en jour son domaine; on l'applique aujourd'hui avec succès à des questions qu'aux débuts l'on n'eût pas cru accessibles par ses procédés; elle a pris naissance dans les travaux de Monge, mais c'est surtout dans les recherches de Gauss qu'on la voit se préciser: elle s'y révèle avec les propriétés à la surface, les notions de courbure totale, de représentation sphérique. L'étude des lignes géodésiques, des lignes de courbure, des asymptotiques fait alors l'objet d'importants travaux qui tous ont pour but l'étude individuelle des surfaces.

L'un des Chapitres les plus importants de la nouvelle théorie, celui de la déformation, conduit, à l'aide des notions de courbure géodésique et de courbure proprement dite, à des résultats d'une extrême élégance. A propos de la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée, M. Codazzi découvre les formules analytiques qui lient entre eux les éléments indéformables et ceux qui définissent la forme. Avant lui l'abbé Aoust avait, sous forme de relations géométriques, trouvé les mêmes résultats. M. Bonnet vient ensuite établir l'importance capitale de ces formules en les appliquant à la détermination complète de surfaces définies par des considérations différentielles. On entrevoit seulement le champ à parcourir dans cet ordre d'idées, en même temps qu'on est arrêté par les difficultés analytiques du sujet.

2. *Familles de surfaces.* — D'autre part, des recherches de Géométrie pure conduisaient M. Dupin à l'importante découverte des systèmes triplement orthogonaux; M. Lamé les introduit systématiquement en Mécanique; il établit à ce propos la théorie des coordonnées curvilignes. Remarquons qu'ici l'on ne se contente plus de ce qui se passe sur une surface; on en sort, pour ainsi dire, et, se tenant d'abord à des distances infiniment petites, on arrive consécutivement et par intégration à opérer des constructions dans l'espace. Les familles de surfaces, comme les surfaces, méritent une classification : MM. Lamé, Bertrand, Bonnet élucident complètement la belle question des surfaces triplement isothermes et orthogonales. Dans le même ordre de recherches, M. Darboux prouve que le système triplement orthogonal, isotherme par surfaces individuelles, se réduit aux anallagmatiques homofocales du quatrième ordre. Cette branche de la théorie des surfaces, subordonnée à l'intégration de nombreuses équations différentielles, demandera encore bien des efforts avant de pouvoir être appliquée avec généralité.

3. *Géométrie autour de la surface de référence.* — Il importe, pensons-nous, si l'on veut employer la théorie des surfaces efficacement, de pouvoir opérer dans l'espace par des constructions *tout intégrées*, de fonder, si je puis m'exprimer ainsi, une sorte de Géométrie analytique permettant d'étudier, sans l'introduction d'éléments inutiles,

tout ce qui est relatif aux propriétés infinitésimales d'une figure donnée, qu'elle varie ou non à chaque instant. Il faut opérer autour d'une surface et avec la plus grande généralité, comme on opère habituellement autour d'un point; encore convient-il de s'affranchir absolument des éléments qui tiennent à l'orientation et que l'on traîne sans aucune utilité dans les calculs, au préjudice de la simplicité et de l'évidence des résultats. Depuis plusieurs années, j'ai donné de nombreuses applications de cette Géométrie autour des surfaces qui fera l'objet exclusif du Mémoire que je soumets aujourd'hui à l'Académie.

4. *Méthode suivie dans cette Géométrie.* — Dans les problèmes que j'ai en vue, j'introduis en général des constructions finies qui font dépendre les éléments successifs d'une figure des éléments correspondants d'une surface dite *de référence.* Traçons, par exemple, sur une surface un réseau (u, v); soient OX, OY les tangentes en O (u, v) à (v) et (u), OZ la normale à la surface. Faisons à chaque instant correspondre un point M de l'espace à O, et, dans ce but, donnons-nous les coordonnées instantanées ξ, η, ζ par rapport aux axes OX, OY, OZ: à toute position de O′ infiniment voisine de O va correspondre une position de M′ voisine de M; la position de O′ est définie par les accroissements du et dv, celle de M′ l'est par les quantités $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ considérées comme fonctions de u et v. Désignons par Δx, Δy, Δz les projections de MM′ sur OX, OY, OZ; on pourra les calculer en fonction de du, dv à l'aide des $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, par conséquent on connaîtra le déplacement réel de M en M′. Opérant de la même façon pour tous les points d'une figure, on voit comment elle se déplace en se déformant lorsque u et v s'accroissent de du et dv.

Plus généralement, si l'on se donne à chaque instant une relation $F(\xi, \eta, \zeta, u, v) = 0$ définissant une surface correspondant à chaque point $O(u, v)$ de la surface de référence, on peut trouver comment elle se déplace en se déformant lorsque u et v croissent de du et dv, sans définir chaque point individuellement. Il suffit, en effet, de calculer en fonction des coordonnées X, Y, Z d'un point par rapport à OX, OY, OZ les coordonnées ξ, η, ζ de ce point par rapport à O′X′, O′Y′, O′Z′; substituant ces valeurs dans l'équation donnée, on aura par rapport aux premiers axes l'équation de la surface déformée.

De ceci résulte que, moyennant l'usage de ces formules de transformation de coordonnées, établies une fois pour toutes, on pourra, autour d'une surface, effectuer toutes les opérations de Géométrie analytique comme avec les coordonnées cartésiennes.

5. *Cas d'un réseau* (u, v) *non orthogonal.* — Il n'est pas nécessaire que les axes OX, OY soient tangents aux lignes (v) et (u), pourvu que leur direction soit déterminée en fonction de u et v. Dans cet ordre d'idées, on arrive à prendre pour le réseau (u), (v) un système de courbes même non orthogonales, en conservant trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. De cette façon l'on peut mettre en évidence les éléments du réseau qui s'approprie le mieux à la question, tout en faisant disparaître la complication résultant de l'emploi de coordonnées obliques dans les opérations de Géométrie analytique autour de la surface. Cette remarque, on le verra, a une grande importance.

6. *Correspondance de deux espaces.* — Au lieu d'une surface de référence unique et de deux paramètres u et v, on peut prendre un système triple de surfaces dépendant de trois paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 et faire correspondre entre eux deux espaces différents par certaines constructions géométriques. M. Liouville a traité un remarquable exemple de correspondance qu'il a pu intégrer complètement. Nous donnerons des formules pour le cas des systèmes triplement orthogonaux; elles nous permettront d'établir deux transformations géométriques des systèmes triplement orthogonaux, dont l'une avait été découverte analytiquement par M. Combescure.

7. *Étude d'une même question à l'aide de diverses surfaces de référence.* — L'un des plus grands avantages de la méthode générale que nous employons consiste dans la facilité avec laquelle on peut attaquer des problèmes de façons différentes, suivant le choix que l'on fait de la surface de référence. En général, les questions relatives à la théorie des surfaces dépendent de l'intégration d'équations aux différentielles partielles du second ordre. Il importe, au point de vue géométrique, pour la simplicité des résultats, au point de vue analytique,

pour les difficultés d'intégration, de ramener le problème aux formes irréductibles, canoniques, pour ainsi dire, et celles-ci sont souvent bien différentes suivant les éléments que l'on suppose connus et ceux que l'on veut déterminer.

Quand on cherche, par exemple, à établir la théorie des faisceaux de cercles normaux à des surfaces, si l'on prend pour surface de référence l'une des surfaces trajectoires, on réduit le problème à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2Z}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{dZ}{d\rho}\frac{1}{H}\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{dZ}{d\rho_1}\frac{1}{H_1}\frac{dH_1}{d\rho}, \tag{1}$$

dont la forme se prête aux intégrations explicites, ainsi que l'a fait voir M. Moutard; il est donc facile de construire un très grand nombre de solutions. Si, au contraire, on choisit comme surface de référence la surface enveloppe des plans des cercles, on trouve une équation tout à fait analogue à celle des surfaces applicables sur une surface donnée, par conséquent beaucoup moins maniable que la précédente. Seulement cette nouvelle équation met en évidence ce fait remarquable que les cercles admettent une famille de surfaces trajectoires, quelle que soit la forme de la surface enveloppe de leurs plans. Il en résulte que l'équation relativement compliquée est, au fond, la plus simple, puisque, à elle seule, elle régit tout le problème, tandis que l'équation (1) suppose l'intégration préalable des équations de Codazzi sur la surface de référence.

Citons encore l'exemple des surfaces applicables l'une sur l'autre : on sait que l'équation des surfaces applicables sur une surface donnée présente de très grandes difficultés d'intégration; mais le problème devient des plus simples lorsqu'on se propose de déterminer tous les couples de surfaces applicables l'une sur l'autre; l'équation caractéristique prend la forme

$$\frac{d^2Z}{du\, dv} = \lambda Z,$$

la seule qui puisse avec (1) être, dans certains cas, intégrée explicitement. Dans le premier cas, la surface de référence est une des surfaces applicables; dans le second, c'est la surface lieu des milieux des cordes

qui joignent les points correspondants. Il est remarquable que dans ce problème, où les positions respectives des surfaces semblent *a priori* être indifférentes, c'est par la considération même de ces positions que le problème se simplifie d'une façon inattendue et conduit à d'élégants résultats.

Au fond, ces simplifications tiennent toujours à ce fait que, d'une part, une seule équation différentielle régit le problème et que, de l'autre, puisque l'on se donne la surface de référence et sa position dans l'espace, on suppose intégrées les trois équations de Codazzi, relatives à cette surface. Aussi, dès que dans l'étude d'une question auxiliaire les éléments de forme de la surface doivent être les résultats, le problème se complique à nouveau.

Dans le cas où le choix des surfaces de référence n'est pas naturellement indiqué, c'est en cherchant à réduire le nombre des inconnues qu'on arrive à découvrir le système le plus avantageux; la même remarque s'applique au choix du réseau (u, v) sur la surface de référence.

8. *Indication de la division du Mémoire.* — Le premier Chapitre du Mémoire est consacré à l'établissement des formules fondamentales dans le cas où le réseau (u, v) est orthogonal, ainsi qu'à la recherche directe du sens géométrique des coefficients introduits. Le deuxième Chapitre comprend la même étude, mais dans le cas où le réseau (u, v) n'est pas orthogonal. Le troisième Chapitre est consacré à l'établissement des formules fondamentales relatives à la correspondance de deux espaces en prenant pour réseau de référence une famille triple orthogonale de surfaces; il a paru convenable d'établir préalablement et par les procédés de la *Géométrie autour des surfaces,* la théorie des systèmes triplement orthogonaux. Ces trois premiers Chapitres constituent la première Partie de notre travail; la seconde comprendra une série d'applications relatives aux faisceaux de droites, aux développées, à l'étude des couples de surfaces applicables l'une sur l'autre, à la correspondance de deux surfaces par orthogonalité des éléments, aux systèmes cycliques, au mouvement le plus général d'un corps assujetti à quatre conditions. Nous examinerons ensuite les propriétés des faisceaux de courbes planes normales à des surfaces.

Comme suite à cette dernière application, nous entreprendrons l'examen des propriétés des sections planes d'une surface par les plans tangents d'une autre surface; en particulier, l'étude des sections des surfaces par leurs plans tangents; ceci nous amènera à rechercher de nouvelles propriétés des surfaces, et à généraliser le théorème de Beltrami.

Enfin nous terminerons par l'étude de la correspondance des systèmes triplement orthogonaux.

CHAPITRE I.

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES FONDAMENTALES. (u, v) ÉTANT ORTHOGONAL.

9. *Définition du réseau coordonné; formules donnant les coordonnées d'un même point par rapport à deux trièdres successifs.* — Nous considérerons, pour établir les formules, une surface concave de haut en bas par rapport à la normale, afin de supprimer, par cette hypothèse, toute ambiguïté sur les signes; les formules sont d'ailleurs absolument générales et les signes attribués par le calcul aux quantités géométriques qui y figurent indiquent précisément dans chaque cas particulier comment doit être envisagée la courbure de la surface de référence (O).

Soit O un point de (O) défini par les paramètres u, v de deux courbes (u) et (v) orthogonales, tracées sur (O) et qui le contiennent. Prenons pour axes instantanés OX, OY, OZ les tangentes en O aux courbes (v), (u) et la normale à (O). Nous compterons les longueurs positives et négatives comme d'habitude.

Une surface (M) correspond point par point à (O). On définit à chaque instant M par rapport à O en fixant ses coordonnées ξ, η, ζ par rapport à OX, OY, OZ. Si l'on donne aux paramètres u et v les accroissements du et dv, on passe de O en O′ et de M en M′; les coordonnées de M′ par rapport aux axes O′X′, O′Y′, O′Z′ sont $\xi + \Delta\xi$,

$\eta + \Delta\eta$, $\zeta + \Delta\zeta$; par rapport aux axes OX, OY, OZ, elles sont $\xi + \Delta X$, $\eta + \Delta Y$, $\zeta + \Delta Z$. On remarquera que $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ sont les projections de MM′ sur les axes OX, OY, OZ; il s'agit de les déterminer. Pour y arriver, menons par le point O′ des parallèles $O'X_1$, $O'Y_1$, $O'Z_1$ aux droites OX, OY, OZ; désignons par X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées de M′ par rapport à ces nouveaux axes; on a

$$X_1 = (\xi + \Delta\xi)\cos(X'X_1) + (\eta + \Delta\eta)\cos(Y'X_1) + (\zeta + \Delta\zeta)\cos(Z'X_1),$$

$$Y_1 = (\xi + \Delta\xi)\cos(X'Y_1) + (\eta + \Delta\eta)\cos(Y'Y_1) + (\zeta + \Delta\zeta)\cos(Z'Y_1),$$

$$Z_1 = (\xi + \Delta\xi)\cos(X'Z_1) + (\eta + \Delta\eta)\cos(Y'Z_1) + (\zeta + \Delta\zeta)\cos(Z'Z_1).$$

Cherchons la valeur des neuf cosinus.

10. *Forme nécessaire des équations de transformation des coordonnées instantanées.* — Menons par le centre d'une sphère de rayon égal à l'unité des parallèles aux droites OX, OY, OZ, et O′X′, O′Y′, O′Z′, qui rencontreront la surface de cette sphère aux points XYZ et X′Y′Z′; traçons les grands cercles ZY, YX, XZ et Z′Y′, Y′X′, X′Z′, puis prolongeons-les jusqu'à leurs rencontres mutuelles aux environs des trois sommets X, Y, Z. On obtient les quadrilatères $ZZ'ab$, $YY'de$, $XX'ef$ qui, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, sont des rectangles. Dès lors, à cette approximation on peut écrire (et ceci définit la situation des points a, b, c, d, e, f)

$$ad = ZY, \qquad bc = ZX, \qquad de = X'Y',$$

et, par conséquent,

$$dY' = aZ' = cY = bZ,$$
$$eX' = bZ' = fX = aZ,$$
$$dY = eX = cY' = fX'.$$

Évaluons à présent les neuf cosinus :

$\cos(X'X)$. — L'angle X′X étant infiniment petit du premier ordre, on pose

$$\cos(X'X) = 1.$$

$\cos(Y'X)$. — On peut le remplacer par $\cos(Xd)$ parce que Xd ne diffère de l'arc de grand cercle passant par X et Y' que d'un infiniment petit du second ordre, mais Xd a pour valeur $\frac{\pi}{2} + Yd$: donc

$$\cos(Xd) = -\sin(Yd) = Yd,$$
$$\cos(Y'X) = Yd.$$

$\cos(Z'X)$. — On peut le remplacer par $\cos(aX)$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{2} - aZ\right)$: donc

$$\cos(Z'X) = aZ.$$

En opérant de même sur les six autres cosinus, on voit que

$$\begin{aligned}
&\cos(X'Y) = eX = dY,\\
&\cos(Y'Y) = 1,\\
&\cos(Z'Y) = aZ' = bZ,\\
&\cos(X'Z) = Xf = aZ,\\
&\cos(Y'Z) = Ye = -bZ,\\
&\cos(Z'Z) = 1.
\end{aligned}$$

Substituant dans les valeurs de X_1, Y_1, Z_1, il vient

$$\begin{aligned}
X_1 &= \xi + \Delta\xi - (\eta + \Delta\eta)\,Yd + (\zeta + \Delta\zeta)\,aZ,\\
Y_1 &= \eta + \Delta\eta + (\xi + \Delta\xi)\,Yd + (\zeta + \Delta\zeta)\,bZ,\\
Z_1 &= \zeta + \Delta\zeta - (\xi + \Delta\xi)\,aZ - (\eta + \Delta\eta)\,bZ,
\end{aligned}$$

et l'on remarquera qu'il n'y entre que trois éléments Yd, aZ, bX ; ceux-ci sont infiniment petits du premier ordre et fonctions de du, dv ; dès lors, on est assuré qu'ils sont de la forme

$$\begin{aligned}
Yd &= M\,du + N\,dv,\\
aZ &= P\,du + C\,dv,\\
bZ &= Q\,dv + C'\,du,
\end{aligned}$$

où M, N, P, Q, C, C′ représentent six nouveaux coefficients fonctions de u et v, dont la signification géométrique n'est pas encore connue, mais qu'il importe peu de rechercher pour le moment.

Substituons les valeurs qui précèdent à celles de $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ dans les valeurs de X_1, Y_1 et Z_1, puis remarquons que

$$\Delta X = X_1 - \xi + f\,du, \qquad \Delta Y = Y_1 - \eta + g\,dv, \qquad \Delta Z = Z_1 - \zeta,$$

si l'on pose

$$dS^2 = \overline{OO'}^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2,$$

et nous trouvons les formules fondamentales

$$\Delta X = du\left(f + \frac{d\xi}{du} - M\eta + P\zeta\right) + dv\left(\frac{d\xi}{dv} - N\eta + C\zeta\right),$$

$$\Delta Y = dv\left(g + \frac{d\eta}{dv} + N\xi + Q\zeta\right) + du\left(\frac{d\eta}{du} + M\xi + C'\zeta\right),$$

$$\Delta Z = du\left(\frac{d\zeta}{du} - P\xi - C'\eta\right) + dv\left(\frac{d\zeta}{dv} - Q\eta - C\xi\right).$$

11. *Relations liant entre eux les coefficients des valeurs des Δ.* — Avant d'aller plus loin, il importe de trouver quelles sont les relations qui lient entre eux les six coefficients et les quantités f et g. On y parvient sans sortir de la méthode même que nous étudions, c'est-à-dire sans recourir à des systèmes de coordonnées étrangers à la question.

Au lieu de chercher la surface lieu du point M, supposons-la connue et aussi simple que possible, c'est-à-dire réduite à un point; il est manifeste que les quantités ΔX, ΔY, ΔZ doivent être constamment nulles, dans cette hypothèse, et quels que soient les accroissements du, dv; on a donc

$$f + \frac{d\xi}{du} - M\eta + P\zeta = 0,$$

$$g + d\eta + N\xi + Q\zeta = 0$$

et

$$\frac{d\xi}{dv} - N\eta + C\zeta = 0,$$

$$\frac{d\eta}{du} + M\xi + C'\zeta = 0,$$

$$\frac{d\zeta}{du} - P\xi - C'\eta = 0,$$

$$\frac{d\zeta}{dv} - Q\eta - C\xi = 0.$$

Exprimons que les valeurs déduites de ces équations pour $\frac{d^2\xi}{du\,dv}$, $\frac{d^2\eta}{du\,dv}$, $\frac{d^2\zeta}{du\,dv}$ (qui peuvent être obtenues de deux manières) sont égales, il vient, après un calcul élémentaire,

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dv} + Mg + \eta\left(PQ - CC' - \frac{dM}{dv} + \frac{dN}{du}\right)\\
&\qquad\qquad + \zeta\left(\frac{dP}{dv} - NC' - \frac{dC}{du} + MQ\right) = 0,\\
&\frac{dg}{du} - Nf + \xi\left(PQ - CC' + \frac{dN}{du} - \frac{dM}{dv}\right)\\
&\qquad\qquad + \zeta\left(\frac{dQ}{du} + MC - \frac{dC'}{dv} - NP\right) = 0,\\
&-Cf + C'g + \eta\left(-PN - \frac{dC'}{dv} + CM + \frac{dQ}{du}\right)\\
&\qquad\qquad - \xi\left(\frac{dP}{dv} - NC' - \frac{dC}{du} + MQ\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ces nouvelles équations, si elles n'étaient identiques, conduiraient à un seul système de valeurs de ξ, η, ζ, c'est-à-dire qu'il n'y aurait qu'un seul point dans l'espace. Pour qu'il y en ait une infinité, on doit avoir

$$M = -\frac{df}{g\,dv},$$

$$N = \frac{dg}{f\,du},$$

$$Cf = C'g.$$

et

$$PQ - CC' - \frac{dM}{dv} + \frac{dN}{du} = 0,$$

$$\frac{dP}{dv} - NC' - \frac{dC}{du} + MQ = 0,$$

$$\frac{dQ}{du} + MC - \frac{dC'}{dv} - NP = 0.$$

Telles sont les relations qui lient entre eux les six coefficients. Je renvoie au travail de M. Bonnet pour démontrer que, si ces équations sont vérifiées, la surface existe et qu'elle est unique.

12. *Valeurs définitives des Δ, équations de condition.* — En tenant compte de ce qui précède, on voit que les formules fondamentales peuvent s'écrire définitivement

$$(F)\quad \begin{cases} \Delta X = du\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta + P\zeta\right) + dv\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta - gD\zeta\right), \\ \Delta Y = du\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi - fD\zeta\right) + dv\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi + Q\zeta\right), \\ \Delta Z = du\left(\frac{d\zeta}{du} - P\xi + fD\eta\right) + dv\left(\frac{d\xi}{dv} - Q\eta + gD\xi\right), \end{cases}$$

pourvu que l'on pose

$$Cf = C'g = fgD.$$

Indépendamment de f et g il n'y entre plus que trois fonctions P, Q, D qui satisfont aux équations de condition

$$(\varphi)\quad \begin{cases} PQ - fgD^2 + \frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du}\right) = 0, \\ \frac{dP}{dv} + g\frac{dD}{du} + 2\frac{dg}{du}D - \frac{df}{g\,dv}Q = 0, \\ \frac{dQ}{du} + f\frac{dD}{dv} + 2\frac{df}{dv}D - \frac{dg}{f\,du}P = 0; \end{cases}$$

ce sont les formules de Codazzi.

13. *Coordonnées d'un même point par rapport à deux trièdres successifs.* — Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, constamment il faut, connaissant les coordonnées d'un point par rapport aux axes O'X', O'Y', O'Z', les exprimer en fonction de ses coordonnées par rapport aux axes primitifs OX, OY, OZ.

Désignons par X', Y', Z' les coordonnées du point M par rapport aux axes O'X', O'Y', O'Z' et par X, Y, Z ses coordonnées par rapport à OX, OY, OZ; on obtiendra visiblement les relations cherchées en égalant à zéro ΔX, ΔY, ΔZ, dans les formules trouvées plus haut, remplaçant ξ, η, ζ par X, Y, Z, $\Delta\xi$ par $X'-X$, $\Delta\eta$ par $Y'-Y$, $\Delta\zeta$ par $Z'-Z$. Il vient ainsi

$$(\Phi)\quad \left\{\begin{aligned} X' &= -f\,du + X + Y\left(-\frac{df}{g\,dv}\,du + \frac{dg}{f\,du}\,dv\right) + Z(-P\,du + gD\,dv),\\ Y' &= -g\,dv + X\left(-\frac{dg}{f\,du}\,dv + \frac{df}{g\,dv}\,du\right) + Y + Z(-Q\,dv + fD\,du),\\ Z' &= X(P\,du - gD\,dv) + Y(Q\,dv - fD\,du) + Z. \end{aligned}\right.$$

Les trois systèmes de formules que nous venons d'établir forment les prémisses constamment invoquées de la *Géométrie autour des surfaces;* aussi, pour simplifier le langage, les désignons-nous par les lettres d'ordre (F), (φ), (Φ).

14. *Recherche par la Géométrie autour des surfaces et empiriquement des coefficients des valeurs des* Δ. — Il convient actuellement de rechercher la signification des coefficients P, Q, D; ceux-ci dépendent manifestement de la courbure des lignes (v) et (u) qui se croisent en O, et, comme ces courbures résultent immédiatement de la connaissance des droites polaires de (v) et (u), on est conduit à rechercher les équations de ces droites.

La polaire de la courbe (v) est, à la limite, l'intersection de deux plans normaux (infiniment voisins) à cette courbe.

L'équation du plan normal en O est

$$X = 0.$$

Celle du plan normal infiniment voisin quand on se déplace sur (v).

u variant seul, est

$$X' = -f\,du + X - Y\frac{df}{g\,dv}\,du - ZP\,du = 0.$$

De telle sorte que la seconde équation de la polaire comprise dans le plan normal à (v) est

$$f + Y\frac{df}{g\,dv} + ZP = 0.$$

Le point où cette droite perce le plan tangent [centre de courbure géodésique de (v)] est défini par les équations

$$X = 0, \qquad f + Y\frac{df}{g\,dv} = 0.$$

Le point où elle rencontre la normale à la surface de référence [centre de courbure de la section normale tangente à (v)] est déterminé par les équations

$$X = 0, \qquad f + ZP = 0.$$

On voit que $+\frac{f}{P}$ est le rayon de courbure de la section normale tangente à (v).

On objectera sans doute que nous faisons appel à des notions de Géométrie; mais, si l'on y voit quelque inconvénient, il est très facile d'y suppléer en cherchant directement, et d'après leur définition même, les courbures de la section normale et de la projection de (v) sur le plan tangent, par nos procédés. Il nous paraît inutile de rétablir ici des résultats tout à fait élémentaires, qu'on démontre avec une égale facilité, quel que soit le système de démonstration.

Nous donnerons pourtant la valeur du coefficient D, afin d'indiquer dès à présent comment on peut se servir des formules (F).

Portons sur les normales à (O) suivant (v) une longueur constante ζ; il vient, ξ et η étant nuls,

$$\Delta X = -du\,f\,D\zeta;$$

mais $\frac{\Delta Y}{\zeta}$ est l'angle que la normale en O′ fait avec le plan ZOX; $f\,du$ est la distance OO′; — D est donc le quotient de ces deux quantités, ou le *paramètre de déviation* suivant (v) (Bertrand).

15. *Condition pour que deux directions suivies soient conjuguées.* — Nous terminerons ce Chapitre en établissant la condition pour que deux directions issues de O et définies par les accroissements du, dv, du', dv' soient conjuguées, condition dont nous nous servirons à chaque instant.

L'équation du plan tangent en O′ à la surface de référence est

$$Z' = X(P\,du - g\,D\,dv) + Y(Q\,dv - f\,D\,du) + Z = 0,$$

qui conduit pour les équations de la conjuguée de OO′ à

$$Z = 0, \qquad X(P\,du - g\,D\,dv) + Y(Q\,dv - f\,D\,du) = 0;$$

mais on a

$$\frac{X}{f\,du'} = \frac{Y}{g\,dv'};$$

il vient, après substitution,

$$(2) \qquad du\,du'\,f\,P - fg\,D(du'\,dv + du\,dv') + dv\,dv'\,g\,Q = 0,$$

qui est la relation cherchée.

CHAPITRE II.

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES FONDAMENTALES, LORSQUE LE RÉSEAU (u, v) N'EST PAS ORTHOGONAL.

16. *Les valeurs des* Δ *ont la même forme que dans l'autre cas.* — Il est parfois très avantageux d'introduire dans les calculs un réseau non orthogonal (u, v) tracé sur la surface de référence, mais

les formules de Géométrie à trois dimensions sont trop compliquées lorsqu'on prend des axes obliques; aussi, dans ce qui va suivre, exécuterons-nous les opérations géométriques par rapport à un trièdre trirectangle tel que OZ soit normale à la surface de référence et que OX, OY soient les bissectrices de l'angle que font entre elles les lignes (v) et (u).

Nous désignerons par θ le demi-angle dans lequel est compris l'axe des X. Lorsque les paramètres croissent de du et dv, le point O vient en O'; le dS^2 étant mis sous la forme

$$dS^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2 + 2fg\,du\,dv\cos 2\theta,$$

on a pour les distances dx, dy du point O' aux axes OY, OX

$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta(f\,du + g\,dv),\\ dy &= \sin\theta(g\,dv - f\,du). \end{aligned}$$

Considérons maintenant un point M dont les coordonnées sont ξ, η, ζ par rapport aux axes instantanés OX, OY, OZ, les projections du déplacement MM' peuvent toujours s'écrire

$$\Delta X = dx + X_1 - \xi, \qquad \Delta Y = dy + Y_1 - \eta, \qquad \Delta Z = Z_1 - \zeta,$$

comme dans le Chapitre précédent. Rien ne s'oppose non plus à ce que l'on garde les valeurs de X_1, Y_1, Z_1 en fonction des six indéterminées M, N, P, Q, C, C'.

Il vient, après substitution,

$$(\mathrm{F}') \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta X = {}& du\left(f\cos\theta + \frac{d\xi}{du} - \eta M + \zeta P\right)\\ &+ dv\left(g\cos\theta + \frac{d\xi}{dv} - \eta N + \zeta C\right),\\ \Delta Y = {}& du\left(-f\sin\theta + \frac{d\eta}{du} + \xi M + \zeta C'\right)\\ &+ dv\left(g\sin\theta + \frac{d\eta}{dv} + \xi N + \zeta Q\right),\\ \Delta Z = {}& du\left(\frac{d\zeta}{du} - P\xi - C'\eta\right)\\ &+ dv\left(\frac{d\zeta}{dv} - Q\eta - C\xi\right), \end{aligned} \right.$$

équations qui diffèrent très peu de celles qui ont été trouvées plus haut. On les traitera de la même manière pour trouver les relations qui lient entre eux les coefficients.

17. *Relations entre les coefficients des* Δ. — Supposons donc que le point M soit immobile dans l'espace; ΔX, ΔY, ΔZ doivent être nuls, quels que soient du et dv. On a donc

$$f\cos\theta + \frac{d\xi}{du} - \eta M + \zeta P = 0,$$

$$g\cos\theta + \frac{d\xi}{dv} - \eta N + \zeta C = 0;$$

$$-f\sin\theta + \frac{d\eta}{du} + \xi M + \zeta C' = 0,$$

$$g\sin\theta + \frac{d\eta}{dv} + \xi N + \zeta Q = 0;$$

$$\frac{d\zeta}{du} - P\xi - C'\eta = 0,$$

$$\frac{d\zeta}{dv} - Q\eta - C\xi \ = 0.$$

On en déduit

$$\frac{d}{dv}(f\cos\theta) - \frac{d}{du}(g\cos\theta) + (Mg + Nf)\sin\theta + \eta$$
$$\times\left(-\frac{dM}{dv} + \frac{dN}{du} + PQ - CC'\right) + \zeta\left(\frac{dP}{dv} - \frac{dC}{du} + MQ - C'N\right) = 0,$$

$$\frac{d}{du}(g\sin\theta) + \frac{d}{dv}(f\sin\theta) + (Mg - Nf)\cos\theta + \xi$$
$$\times\left(-\frac{dM}{dv} + \frac{dN}{du} + PQ - CC'\right) + \zeta\left(\frac{dQ}{du} - \frac{dC'}{dv} - NP + CM\right) = 0,$$

$$\sin\theta(gC' + fQ) + \cos\theta(Pg - Cf) - \xi$$
$$\times\left(\frac{dP}{dv} - \frac{dC}{du} + MQ - C'N\right) + \eta\left(\frac{dQ}{du} - \frac{dC'}{dv} - NP + CM\right) = 0;$$

et pour qu'il y ait une infinité de points dans l'espace, il faut que

$$\frac{d}{dv}(f\cos\theta) - \frac{d}{du}(g\cos\theta) + (Mg + Nf)\sin\theta = 0,$$

$$(\Phi)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{du}(g\sin\theta) + \frac{d}{dv}(f\sin\theta) + (Mg - Nf)\cos\theta = 0;\\ &-\frac{dM}{dv} + \frac{dN}{du} + PQ - CC' = 0,\\ &\frac{dP}{dv} - \frac{dC}{du} + MQ - C'N = 0,\\ &\frac{dQ}{du} - \frac{dC'}{dv} - NP + CM = 0;\end{aligned}\right.$$

$$\sin\theta(gC' + fQ) + \cos\theta(Pg - Cf) = 0.$$

Telles sont les relations liant entre eux les six coefficients; il n'échappera pas que ceux-ci ne peuvent plus avoir le même sens géométrique que dans les formules du Chapitre précédent.

18. *Coordonnées d'un point par rapport à deux trièdres successifs.* — On trouve pour X'Y'Z' les valeurs

$$(\Phi')\quad \left\{\begin{aligned} X' &= (f\,du + g\,dv)\cos\theta\\ &\quad + Y(M\,du + N\,dv) - Z(P\,du + C\,dv) + X,\\ Y' &= (f\,du - g\,dv)\sin\theta\\ &\quad - X(M\,du + N\,dv) - Z(Q\,dv + C'\,du) + Y,\\ Z' &= X(P\,du + C\,dv) + Y(Q\,dv + C'\,du) + Z.\end{aligned}\right.$$

19. *Condition pour que deux directions soient conjuguées. Cas où le réseau (u, v) devient celui des asymptotiques de la surface de référence.* — Cherchons la condition pour que deux directions (du, dv) (du', dv') soient conjuguées.

Les équations de la droite conjuguée de OO' sont

$$Z = Z' = 0,$$

$$X(P\,du + C\,dv) + Y(Q\,dv + C'\,du) = 0;$$

mais, si l'on considère la direction conjuguée comme définie par les accroissements du', dv', il faut poser

$$\frac{X}{(f\,du' + g\,dv')\cos\theta} = \frac{Y}{(g\,dv' - f\,du')\sin\theta}.$$

D'où résulte la condition cherchée

$$\begin{aligned} &f(P\cos\theta - C'\sin\theta)\,du\,du' + g(Q\sin\theta + C\cos\theta)\,dv\,dv' \\ &\quad + g(P\cos\theta + C'\sin\theta)\,du\,dv' - f(Q\sin\theta - C\cos\theta)\,dv\,du' = 0. \end{aligned}$$

En particulier, l'équation des asymptotiques est donnée par la formule

$$\begin{aligned} &f(P\cos\theta - C'\sin\theta)\,du^2 + g(Q\sin\theta + C\cos\theta)\,dv^2 \\ &\quad + [g(P\cos\theta + C'\sin\theta) - f(Q\sin\theta - C\cos\theta)]\,du\,dv = 0. \end{aligned}$$

On exprimera que le réseau (u, v) est celui des asymptotiques de la surface de référence en posant

$$P\cos\theta - C'\sin\theta = 0,$$
$$Q\sin\theta + C\cos\theta = 0;$$

mais la dernière des équations (φ') pouvant s'écrire

$$f(Q\sin\theta - C\cos\theta) + g(P\cos\theta + C'\sin\theta) = 0,$$

on voit que l'on peut poser

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} C &= g\sin\theta . H^2, \\ C' &= f\cos\theta . H^2, \\ P &= f\sin\theta . H^2, \\ Q &= -g\cos\theta . H^2. \end{aligned} \right.$$

20. *Ce que deviennent les équations de condition.* — Dans ce cas particulier les formules (φ') se simplifient; déjà la dernière a disparu. Si l'on remplace C, C', P et Q par leurs nouvelles valeurs, tenant

compte des deux premières, on peut substituer aux deux suivantes ces formules remarquables

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{df}{f\,dv}+\frac{dH}{H\,dv}+\frac{g}{f}\,\frac{dH}{H\,du}\cos 2\theta=0,\\
&\frac{dg}{g\,du}+\frac{dH}{H\,du}+\frac{f}{g}\,\frac{dH}{H\,dv}\cos 2\theta=0.
\end{aligned}
$$

M et N sont déterminés individuellement comme il suit :

$$
(5)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&g\sin 2\theta\left(\ \mathrm{M}+\frac{d\theta}{du}\right)+\frac{df}{dv}-\frac{dg}{du}\cos 2\theta=0,\\
&f\sin 2\theta\left(-\mathrm{N}+\frac{d\theta}{dv}\right)+\frac{dg}{du}-\frac{df}{dv}\cos 2\theta=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Il en résulte pour la troisième des équations (φ'), en remplaçant 2θ par ω,

$$
(6)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2\omega}{du\,dv}-\frac{d^2\log fg}{du\,dv}\cos\omega\\
&\qquad+\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv}\right)+\frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du}\right)\right]\frac{1}{\sin\omega}-fg\mathrm{H}^4\sin\omega\\
&\qquad+\frac{1}{\sin^2\omega}\,\frac{d\omega}{dv}\left(-\frac{df}{g\,dv}\cos\omega+\frac{dg}{g\,du}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{\sin^2\omega}\,\frac{d\omega}{du}\left(-\frac{dg}{f\,du}\cos\omega+\frac{df}{g\,dv}\right)=0;
\end{aligned}
\right.
$$

on remarquera que

$$
\begin{aligned}
&\frac{dH}{H\,du}+\frac{1}{\sin^2\omega}\left(-\frac{df}{g\,dv}\cos\omega+\frac{dg}{g\,du}\right)=0.\\
&\frac{dH}{H\,dv}+\frac{1}{\sin^2\omega}\left(-\frac{dg}{f\,du}\cos\omega+\frac{df}{f\,dv}\right)=0.
\end{aligned}
$$

21. *Ce que signifient les coefficients des valeurs des* Δ. *Recherche par la Géométrie autour des surfaces. Théorème sur les lignes asymptotiques des surfaces applicables sur la sphère.* — Il nous reste à trouver, dans l'hypothèse particulière où nous nous plaçons, quelles sont les valeurs des éléments qui définissent la courbure de la surface de référence.

Il est facile de trouver les rayons de courbure principaux; en effet, la courbe tangente à OX est une ligne de courbure; son équation est

$$dy = g\,dv - f\,du = 0.$$

On sait que le centre de courbure principal correspondant est l'intersection de OZ avec le plan normal à cette ligne de courbure et infiniment voisin de O; il faut donc écrire

$$X = Y = X' = 0,$$

c'est-à-dire

$$+(f\,du + g\,dv)\cos\theta + Z(P\,du + Q\,dv) = 0,$$

d'où l'on déduit pour le Z du centre de courbure principal

$$Z_1 = -\frac{\cot\theta}{H^2}.$$

On trouve de la même façon pour le second centre de courbure principal

$$Z_2 = \frac{\tan\theta}{H^2}.$$

La fonction H a donc un sens géométrique très précis, car

$$-Z_1 Z_2 = \frac{1}{H^4}.$$

H^4 *changé de signe représente la courbure de la surface de référence en* O, dans le sens admis par Gauss [1].

---

(1) Les asymptotiques des surfaces à courbure constante jouissent d'une propriété remarquable qui résulte immédiatement des formules établies ci-dessus. Pour ces surfaces, H est constant : on a donc

$$\frac{df}{dv} - \frac{dg}{du} = 0.$$

D'où résulte qu'en choisissant convenablement les paramètres u et v, on peut

Dans la théorie qui nous occupe, les courbures des lignes asymptotiques jouent un rôle important : aussi convient-il de les calculer.

Si l'on considère l'asymptotique $dv = 0$, l'équation de son plan normal est, en O,

$$X\cos\theta - Y\sin\theta = 0;$$

pour trouver son centre de courbure, il suffira de chercher l'intersection de sa polaire avec le plan tangent en O; or, la polaire est l'inter-

---

prendre l'unité pour f et g; le ds^2 est donc

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv\cos\omega.$$

On en déduit sans peine que :

Si l'on forme, avec quatre lignes asymptotiques sur une surface à courbure constante, un quadrilatère, les côtés opposés ont toujours des longueurs égales.

Pour trouver les surfaces dont il est question, il faudrait intégrer

$$\frac{d^2\omega}{du\,dv} = H^4\sin\omega.$$

Le plan correspond à un cas limite, dans lequel le problème se résout, car, H étant nul, on a

$$\frac{d^2\omega}{du\,dv} = 0,$$

par conséquent

$$\omega = F(u) + \Phi(v),$$

où F et Φ sont deux fonctions arbitraires.

Le ds^2 du plan prend la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv\cos[F(u) + \Phi(v)].$$

Cette intégrale donne la solution du problème :

Trouver sur le plan tous les réseaux de courbes telles que, si l'on forme un quadrilatère avec deux courbes de chaque famille, les côtés opposés soient égaux.

On vérifie facilement que, tout le long d'une des courbes de cette espèce, les rayons de courbure de toutes les courbes de la seconde famille sont égaux.

section du plan normal en O avec le plan infiniment voisin qui a pour équation

$$X'\left(\cos\theta - \sin\theta\frac{d\theta}{du}du\right) - Y'\left(\sin\theta + \cos\theta\frac{d\theta}{du}du\right) = 0.$$

Revenant aux premiers axes et ne conservant que les infiniment petits du premier ordre, il vient

$$\left(M - \frac{d\theta}{du}\right)(X\sin\theta + Y\cos\theta) - f = 0,$$

d'où résulte, en désignant par ρ_v le rayon de courbure,

$$M - \frac{d\theta}{du} = \frac{f}{\rho_v}.$$

De même, en désignant par ρ_u le rayon de courbure de la seconde asymptotique, on trouve

$$N + \frac{d\theta}{dv} = \frac{g}{\rho_u}.$$

CHAPITRE III.

RECHERCHE DES SYSTÈMES TRIPLEMENT ORTHOGONAUX. FORMULES FONDAMENTALES POUR LA CORRESPONDANCE DE DEUX ESPACES.

22. *Trouver les surfaces telles qu'un réseau conjugué, tracé sur elles, se projette suivant le réseau des lignes de courbure de la surface de référence.* — Avant d'aborder la théorie générale des systèmes triplement orthogonaux, il nous faut résoudre le problème suivant :

Trouver les surfaces (S) telles que les développables lieux de normales à la surface de référence (O) les découpent suivant des réseaux conjugués.

Prenons pour réseau (u, v) celui des lignes de courbure de (O) et désignons par l la longueur du segment de la normale compté à partir de O jusqu'à la rencontre de (S) en S; il s'agit de trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait l.

Les coordonnées instantanées du point S sont

$$\xi = \eta = 0, \qquad \zeta = l,$$

D est nul; on a donc pour les formules (F) le système

$$\Delta X = du\,(f + Pl),$$
$$\Delta Y = dv\,(g + Ql),$$
$$\Delta Z = du\,\frac{dl}{du} + dv\,\frac{dl}{dv}.$$

L'équation du plan tangent à (S) en S est dès lors

$$Z - l = \frac{\frac{dl}{du}}{f + Pl}X + \frac{\frac{dl}{dv}}{g + Ql}Y.$$

Il faut exprimer que sa caractéristique dans l'hypothèse $dv = 0$ coïncide avec le segment décrit par S dans l'hypothèse $du = 0$. Il suffit, évidemment, de considérer la parallèle à la caractéristique menée par l'origine : on supprimera donc les termes indépendants de X, Y, Z dans l'équation de la seconde position du plan tangent à (S). On écrira

$$Z' = \left[\frac{\frac{dl}{du}}{f + Pl} + \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dl}{du}}{f + Pc}\right)du\right]X'$$
$$+ \left[\frac{\frac{dl}{dv}}{g + Ql} + \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dl}{dv}}{g + Ql}\right)du\right]Y'.$$

Substituant les valeurs de Z', X', Y',

$$Z' = P\,du\,X + Z,$$
$$X' = -f\,du + X - \frac{df}{g\,dv}du\,Y - P\,du\,Z$$
$$Y' = \frac{df}{g\,dv}du\,X + Y,$$

et réduisant, comme il a été dit, on trouve

$$\mathrm{P}\Delta\mathrm{X} = -\frac{\dfrac{dl}{du}}{f+\mathrm{P}l}\left(\frac{df}{g\,dv}\Delta\mathrm{Y} + \mathrm{P}\Delta\mathrm{Z}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{\dfrac{dl}{du}}{f+\mathrm{P}l}\right)\Delta\mathrm{X}$$
$$+\frac{\dfrac{dl}{dv}}{g+\mathrm{Q}l}\left(\frac{df}{g\,dv}\right)\Delta\mathrm{X} + \frac{d}{du}\left(\frac{\dfrac{dl}{dv}}{g+\mathrm{Q}l}\right)\Delta\mathrm{Y}.$$

Cette équation doit être satisfaite par les valeurs

$$\mathrm{X} = \Delta\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = \Delta\mathrm{Y} = dv(g+\mathrm{Q}l), \qquad \mathrm{Z} = \Delta\mathrm{Z} = dv\frac{dl}{dv},$$

qui correspondent au déplacement de S dans l'hypothèse $du = 0$.

De telle sorte qu'il reste

$$-\frac{\dfrac{dl}{du}}{f+\mathrm{P}l}\left[\frac{df}{g\,dv}(g+\mathrm{Q}l) + \mathrm{P}\frac{dl}{dv}\right] + \frac{d}{du}\left(\frac{\dfrac{dl}{dv}}{g+\mathrm{Q}l}\right)(g+\mathrm{Q}l) = 0.$$

Développant et tenant compte de la condition exprimée par l'une des formules (5),

$$\frac{df}{g\,dv}\mathrm{Q} = \frac{d\mathrm{P}}{dv},$$

on trouve l'équation définitive

$$(7) \qquad \frac{d^2 l}{du\,dv} = \frac{dl}{dv}\frac{d}{du}\log(g+\mathrm{Q}l) + \frac{dl}{du}\frac{d}{dv}\log(f+\mathrm{P}l).$$

On voit avec quelle simplicité se traite le problème; il suffit de cet exemple déjà compliqué pour faire voir tout l'avantage d'une méthode qui supprime les difficultés de signes et rend inutiles tous les efforts géométriques directs qui n'ont pas trait au fond même de la question. D'un autre côté, l'emploi d'une méthode uniforme de recherche rend infiniment plus sûres et plus rapides les investigations; il permet d'exposer les résultats obtenus, sans efforts.

On peut vérifier l'équation (7) par quelques exemples évidents : ainsi les surfaces parallèles à (O) et les deux nappes de la développée

de (O) sont évidemment des surfaces (S); on voit, en effet, que l'équation est vérifiée pour

$$l = \text{const.}, \qquad g + Ql = 0, \qquad f + Pl = 0.$$

23. *Cas où la surface est infiniment voisine de la surface de référence.* — Nous reviendrons plus loin sur le problème en question; pour le moment nous considérerons seulement le cas où la surface (S) est infiniment voisine de la surface de référence. On peut, dans ce cas, poser

$$l = \mathrm{H}\, d\rho,$$

où $d\rho$ désigne un infiniment petit du premier ordre constant; ce sera, si l'on veut, l'accroissement d'un paramètre donnant consécutivement les surfaces (O) et (S) comme faisant partie d'une même famille.

Si l'on substitue la valeur de l dans (7) en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, il vient

$$(8) \qquad \frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dv} = \frac{d\mathrm{H}}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{d\mathrm{H}}{dv}\frac{dg}{g\,du},$$

équation linéaire par rapport à H.

24. *Définition particulière des systèmes triplement orthogonaux. Variation du dS^2 en passant d'une surface à la surface infiniment voisine. Théorème de M. Dupin.* — Abordons maintenant l'étude des systèmes triplement orthogonaux.

Considérons trois familles de surfaces telles qu'une surface quelconque d'entre elles coupe toutes les autres à angle droit et désignons par [A], [B], [C] les familles; soit (O) l'une des surfaces de [A]; les traces des surfaces [B] et [C] sur (O) constituent un réseau orthogonal que nous prendrons pour réseau (u, v).

Pour que le système existe, il faut que, si l'on prend la surface (S) infiniment voisine de (O) et appartenant à [A], les normalies menées le long des courbes du réseau (u, v) découpent sur (S) un réseau orthogonal.

De même, il faudra pouvoir passer de (S) dans les mêmes conditions à une seconde surface infiniment voisine et appartenant à [A].

Si les opérations réussissent consécutivement sur toutes les surfaces de [A], il est clair que le système triple orthogonal existe.

Pour obtenir la surface (S) portons sur les normales à (O) une longueur $\mathrm{H}\,d\rho$ fonction de u et v, $d\rho$ désignant l'accroissement du paramètre des surfaces [A] quand on passe de (O) en (S).

Calculons le $d\mathrm{S}^2$ de la surface (S); on a pour les formules (F) dans l'espèce

$$\begin{aligned}
\Delta\mathrm{X} &= du(f + \mathrm{PH}\,d\rho) - dv\,g\,\mathrm{DH}\,d\rho,\\
\Delta\mathrm{Y} &= du\,f\,\mathrm{DH}\,d\rho + dv(g + \mathrm{QH}\,d\rho),\\
\Delta\mathrm{Z} &= du\,\frac{d\mathrm{H}}{du}\,d\rho + dv\,\frac{d\mathrm{H}}{dv}\,d\rho.
\end{aligned}$$

D'où résulte facilement le $d\mathrm{S}^2$; mais nous n'avons qu'à considérer le terme en $du\,dv$ de cette expression : il est

$$2\,du\,dv\left\{-2fg\,\mathrm{DH}\,d\rho + \mathrm{H}^2\,d\rho^2\left[\frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}\,du}\,\frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}\,dv} - \mathrm{D}(\mathrm{P}g + \mathrm{Q}f)\right]\right\}.$$

On remarquera que nous avons fait le calcul comme si $\mathrm{H}\,d\rho$ était une quantité de grandeur finie, c'est-à-dire comme si (S) n'était pas infiniment voisine de (O). Pour que l'image du réseau (u, v) sur (S) soit un réseau orthogonal, il faut et il suffit que le terme en $du\,dv$ soit nul et, si nous supposons encore $\mathrm{H}\,d\rho$ fini, que

$$-2fg\mathrm{D} + \mathrm{HD}\rho\left[\frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}\,du}\,\frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}\,dv} - \mathrm{D}(\mathrm{P}g + \mathrm{Q}f)\right] = 0.$$

Il est clair que le premier membre de cette équation représente le coefficient de $du\,dv$ dans l'expression

$$\Delta\,\frac{d\mathrm{S}^2}{\mathrm{H}\,d\rho}.$$

Or ce coefficient doit tendre vers zéro en même temps que $d\rho$, ce qui n'est possible qu'autant que

$$\mathrm{D} = 0.$$

Ainsi, *pour qu'il existe un système triplement orthogonal de*

surfaces, il faut que toutes les surfaces de deux familles coupent une surface quelconque de l'autre famille suivant ses lignes de courbure.

C'est le théorème de M. Ch. Dupin.

25. *Équations définissant un système triplement orthogonal.* — Nous venons d'établir, en somme, qu'étant données deux surfaces infiniment voisines (S) et (O), si l'on mène à (O) les normalies principales, elles découpent (S) suivant un réseau que l'on peut considérer comme orthogonal, aux quantités du second ordre près.

Mais, pour que le système triple orthogonal existe, il faut que l'on puisse partir de (S) comme de (O), c'est-à-dire que l'image du réseau (u, v) sur (S) constitue le réseau des lignes de courbure de cette surface. Or ce réseau est déjà rectangulaire : il suffit donc d'exprimer qu'il est conjugué.

Il résulte du problème étudié au commencement de ce Chapitre que cette condition est exprimée par l'équation

$$\frac{d^2 H}{du\,dv} = \frac{dH}{du}\,\frac{df}{f\,dv} + \frac{dH}{dv}\,\frac{dg}{g\,du}.$$

Les formules de Codazzi deviennent ici

$$PQ + \frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du}\right) = 0,$$

$$\frac{dP}{Q\,dv} - \frac{df}{g\,dv} = 0,$$

$$\frac{dQ}{P\,du} - \frac{dg}{f\,du} = 0.$$

On voit que, si ces quatre dernières équations se vérifient en tous les points des surfaces (A), le système triple orthogonal existe.

26. *Établissement des formules de Lamé. Quatre seulement sont nécessaires.* — Considérons maintenant le dS^2 de l'espace rapporté au système des trois familles et mis sous la forme

$$dS^2 = H^2\,d\rho^2 + H_1^2\,d\rho_1^2 + H_2^2\,d\rho_2^2;$$

en posant

$$\rho_1 = u, \qquad \rho_2 = v, \qquad H_1 = f, \qquad H_2 = g,$$

la première équation de condition devient

$$\frac{d^2 H}{d\rho_1\, d\rho_2} = \frac{dH}{d\rho_1}\,\frac{dH_1}{H_1\, d\rho_2} + \frac{dH}{d\rho_2}\,\frac{dH_2}{H_2\, d\rho_1};$$

mais il faut connaître les valeurs de P et Q en H, H_1, H_2 pour transformer les suivantes. Nous pourrions faire remarquer que le rayon de courbure géodésique sur (ρ_2) de la ligne de courbure tangente à OX est aussi le rayon de courbure de la section normale à (ρ) tangente à OX; mais cet artifice géométrique peut laisser les signes incertains; on trouvera sans doute plus satisfaisant le procédé que voici :

Quand on passe de (O) à (S), on a, pour l'accroissement du dS^2, l'expression

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\, dS^2}{H\, d\rho} = \quad & du^2 \left\{ 2fP + \left[\frac{1}{H}\left(\frac{dH}{du}\right)^2 + P^2 H\right] d\rho \right\} \\ & + dv^2 \left\{ 2gQ + \left[\frac{1}{H}\left(\frac{dH}{dv}\right)^2 + Q^2 H\right] d\rho \right\},\end{aligned}$$

qui s'obtient en ajoutant les carrés de ΔX, ΔY, ΔZ. On peut la réduire à

$$\frac{\Delta}{2H\, d\rho}(dS^2) = du^2 fP + dv^2 gQ = d\rho_1^2 H_1 P + d\rho_2^2 H_2 Q;$$

mais, le dS^2 des surfaces (A) étant mis sous la forme

$$dS^2 = H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2,$$

on trouve immédiatement

$$\frac{\Delta}{2H\, d\rho}(dS^2) = d\rho_1^2\, \frac{H_1}{H}\,\frac{dH_1}{d\rho} + d\rho_2^2\, \frac{-H_2}{H}\,\frac{dH_2}{d\rho}.$$

D'où résulte que l'on a

$$P = \frac{dH_1}{H\, d\rho},$$

$$Q = \frac{dH_2}{H\, d\rho}.$$

Substituons dans les formules de Codazzi et réunissons les quatre équations de condition nécessaires et suffisantes

$$
(\varphi'')\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2 H}{d\rho_1\,d\rho_2} = \frac{dH}{d\rho_1}\,\frac{dH_1}{H_1\,d\rho_2} + \frac{dH}{d\rho_2}\,\frac{dH_2}{H_2\,d\rho_1},\\
&\frac{d^2 H_1}{d\rho_2\,d\rho} = \frac{dH_1}{d\rho_2}\,\frac{dH_2}{H_2\,d\rho} + \frac{dH_1}{d\rho}\,\frac{dH}{H\,d\rho_2},\\
&\frac{d^2 H_2}{d\rho\,d\rho_1} = \frac{dH_2}{d\rho}\,\frac{dH}{H\,d\rho_1} + \frac{dH_2}{d\rho_1}\,\frac{dH_1}{H_1\,d\rho},\\
&\frac{dH_1}{H\,d\rho}\,\frac{dH_2}{H\,d\rho} + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dH_2}{H_1\,d\rho_1}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dH_1}{H_2\,d\rho_2}\right) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est clair que, si l'on permute la dernière équation, on en obtiendra deux autres également vraies, mais on est assuré qu'elles se déduisent du système précédent, qui à lui seul définit les familles triples orthogonales.

27. *Établissement des Δ à trois variables.* — Il nous reste à trouver les formules fondamentales qui permettent d'établir la correspondance de deux espaces.

Un point M du second espace correspond au point O du premier; on se donne à chaque instant les coordonnées ξ, η, ζ de M par rapport au trièdre OX, OY, OZ tangent à trois surfaces orthogonales se coupant en O. Il s'agit de calculer les ΔX, ΔY, ΔZ, projections de MM sur les trois axes, lorsque les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 s'accroissent de $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$.

Supposons que, $d\rho$ et $d\rho_1$ restant nuls, ρ_2 croisse seul; on déduit immédiatement des formules (F),

$$
\begin{aligned}
\Delta X_2 &= d\rho_2\left(\frac{d\xi}{d\rho_2} - \frac{dH_2}{H_1\,d\rho_1}\,\eta\right),\\
\Delta Y_2 &= d\rho_2\left(H_2 + \frac{d\eta}{d\rho_1} + \frac{dH_2}{H_1\,d\rho_1}\,\xi + \frac{dH_2}{H\,d\rho}\,\zeta\right),\\
\Delta Z_2 &= d\rho_2\left(\frac{d\xi}{d\rho_2} - \frac{dH_2}{H\,d\rho}\,\eta\right);
\end{aligned}
$$

permutant deux fois consécutivement, il vient

$$\Delta Y = d\rho\left(\frac{d\eta}{d\rho} - \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\xi\right),$$

$$\Delta Z = d\rho\left(H + \frac{d\zeta}{d\rho_2} + \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\eta + \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\xi\right),$$

$$\Delta X = d\rho\left(\frac{d\xi}{d\rho} - \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\zeta\right),$$

puis

$$\Delta Z_1 = d\rho_1\left(\frac{d\zeta}{d\rho_1} - \frac{dH_1}{H\, d\rho}\eta\right),$$

$$\Delta X_1 = d\rho_1\left(H_1 + \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{dH_1}{H\, d\rho}\zeta + \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\eta\right),$$

$$\Delta Y_1 = d\rho_1\left(\frac{d\eta}{d\rho_1} - \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\xi\right).$$

Si les trois paramètres croissent en même temps, les Δ définitifs sont la somme des Δ partiels, de telle sorte que les formules fondamentales peuvent s'écrire

$$(\mathrm{F}'')\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta X &= d\rho\left(\frac{d\xi}{d\rho} - \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\zeta\right)\\
&\quad + d\rho_1\left(H_1 + \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{dH_1}{H\, d\rho}\zeta + \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\eta\right)\\
&\quad + d\rho_2\left(\frac{d\xi}{d\rho_2} - \frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\eta\right),\\
\Delta Y &= d\rho\left(\frac{d\eta}{d\rho} - \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\zeta\right)\\
&\quad + d\rho_2\left(H_2 + \frac{d\eta}{d\rho_1} + \frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\xi + \frac{dH_2}{H\, d\rho}\zeta\right)\\
&\quad + d\rho_1\left(\frac{d\eta}{d\rho_1} - \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\zeta\right),\\
\Delta Z &= d\rho_1\left(\frac{d\zeta}{d\rho_1} - \frac{dH_1}{H\, d\rho}\zeta\right)\\
&\quad + d\rho\left(H + \frac{d\zeta}{d\rho_2} + \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\eta + \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\xi\right)\\
&\quad + d\rho_2\left(\frac{d\zeta}{d\rho_2} - \frac{dH_2}{H\, d\rho}\eta\right).
\end{aligned}\right.$$

28. *Transformation de coordonnées en passant d'un trièdre au trièdre infiniment voisin.* — Nous déduirons ultérieurement les conséquences. Il suffira seulement de tirer de ce qui précède les formules de transformation pour terminer l'établissement des prémisses de notre travail.

$$\Delta X = 0, \qquad \Delta\xi = X' - X, \qquad \xi = X.$$
$$\Delta Y = 0, \qquad \Delta\eta = Y' - Y, \qquad \eta = Y,$$
$$\Delta Z = 0, \qquad \Delta\zeta = Z' - Z, \qquad \zeta = Z:$$

on trouve, tout calcul fait,

$$(\Phi'') \quad \left\{ \begin{aligned} X' &= X - H_1\, d\rho_1 - Y \left| \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\, d\rho_1 - \frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\, d\rho_2 \right| \\ &\qquad + Z \left| \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\, d\rho - \frac{dH_1}{H\, d\rho}\, d\rho_1 \right|, \\ Y' &= Y - H_2\, d\rho_2 - Z \left| \frac{dH_2}{H\, d\rho}\, d\rho_2 - \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\, d\rho \right| \\ &\qquad + X \left| \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\, d\rho_1 - \frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\, d\rho_2 \right|, \\ Z' &= Z - H\, d\rho - X \left| \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\, d\rho - \frac{dH_1}{H\, d\rho}\, d\rho_1 \right| \\ &\qquad + Y \left| \frac{dH_2}{H\, d\rho}\, d\rho_2 - \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\, d\rho \right|. \end{aligned} \right.$$

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES FAISCEAUX DE DROITES PARALLÈLES AUX NORMALES DE LA SURFACE DE RÉFÉRENCE.

29. *Équation de la variation du plan tangent à une surface élémentaire du faisceau.* — Nous étudierons tout d'abord les faisceaux de droites individuellement parallèles aux normales de la surface de référence (O).

Le réseau (u, v) sera orthogonal.

Lorsqu'on suit un chemin sur (O), les droites du faisceau forment une surface gauche élémentaire correspondant à la normalie qui a pour base la courbe suivant laquelle se déplace O.

Le plan tangent à cette surface gauche est fonction de la position du point de contact sur la droite ainsi que des paramètres du et dv. Désignons par θ l'angle qu'il fait avec le plan ZOX; soient ξ et η les coordonnées du point où la droite perce le plan XOY et ζ la hauteur du point de contact au-dessus de ce plan. Quelle que soit la variation de ζ, il est visible que

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\Delta Y}{\Delta X},$$

où ΔY et ΔX ont les valeurs habituelles; donc

$$(9) \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{du\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi - f\mathrm{D}\zeta\right) + dv\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta\right)}{du\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta + \mathrm{P}\zeta\right) + dv\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta - g\mathrm{D}\zeta\right)},$$

Telle est l'équation de la surface élémentaire; elle remplit analytiquement l'office de la droite auxiliaire dans les théories géométriques de M. Mannheim.

30. *Équation des distances focales.* — Nous désignerons la droite par (N), par M son point d'intersection avec le plan tangent en O; toutes les droites (N) constituent un faisceau qui enveloppe deux surfaces focales (A) et (B). Soient A et B les foyers situés sur (N). En ces points, les plans tangents aux surfaces élémentaires restent invariables, quels que soient les accroissements du et dv; on doit donc avoir

$$(10) \qquad \tang\theta = \frac{\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi - f\mathrm{D}\zeta}{f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta + \mathrm{P}\zeta} = \frac{g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta}{\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta - g\mathrm{D}\zeta};$$

remplaçant ζ par Z et ordonnant, il vient

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{Z}^2(fg\mathrm{D}^2 - \mathrm{PQ}) \\ & \quad - \mathrm{Z}\Big[f\mathrm{D}\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right) + g\mathrm{D}\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) \\ & \qquad\qquad + \mathrm{P}g + \mathrm{Q}f + \mathrm{Q}\left(\frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right) + \mathrm{P}\left(\frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right)\Big] \\ & \quad + \left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right) \\ & \qquad\qquad - \left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

31. *Équation des plans principaux.* — Si l'on suit certaines lignes sur (O), les droites (N) se rangent suivant des surfaces développables; le plan toujours tangent est le même tout le long de la génératrice, sauf à l'arête de rebroussement.

Il y a donc deux *plans tangents principaux*, tangents aux surfaces focales (A) et (B). On obtient leur équation en éliminant ζ entre les

trois équations (10), ce qui donne

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}^2\theta\left[P\left(\frac{d\xi}{dv}-\frac{dg}{f\,du}\eta\right)+gD\left(f+\frac{d\xi}{du}+\frac{df}{g\,dv}\eta\right)\right]\\ &\quad+\operatorname{tang}\theta\left[-P\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\xi\right)\right.\\ &\qquad\qquad+Q\left(f+\frac{d\xi}{du}+\frac{df}{g\,dv}\eta\right)\\ &\qquad\qquad\left.+fD\left(\frac{d\xi}{dv}-\frac{dg}{f\,du}\eta\right)-gD\left(\frac{d\eta}{du}-\frac{df}{g\,dv}\xi\right)\right]\\ &\qquad\qquad-Q\left(\frac{d\eta}{du}-\frac{df}{g\,dv}\xi\right)-fD\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\xi\right)=0. \end{aligned}\right.$$

32. Nous appellerons *images principales* les courbes qu'il faut suivre sur (O) pour que les droites (N) se coupent conséculivement.

Si l'on suit l'une de ces courbes, la valeur de $\operatorname{tang}\theta$ doit être indépendante de ζ : donc

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{du\left(\frac{d\eta}{du}-\frac{df}{g\,dv}\xi\right)+dv\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\xi\right)}{du\left(f+\frac{d\xi}{du}+\frac{df}{g\,dv}\eta\right)+dv\left(\frac{d\xi}{dv}-\frac{dg}{f\,du}\eta\right)}=\frac{-fD\,du+Q\,dv}{P\,du-gD\,dv}.$$

D'où résulte, en ordonnant,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &du^2\left[\left(P\frac{d\eta}{du}-\frac{df}{g\,dv}\xi\right)+fD\left(f+\frac{d\xi}{du}+\frac{df}{g\,dv}\eta\right)\right]\\ &\quad+du\,dv\left[P\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\xi\right)-Q\left(f+\frac{d\xi}{du}+\frac{df}{g\,dv}\eta\right)\right.\\ &\qquad\qquad\left.+fD\left(\frac{d\xi}{dv}-\frac{dg}{f\,du}\eta\right)-gD\left(\frac{d\eta}{du}-\frac{df}{g\,dv}\xi\right)\right]\\ &\qquad-dv^2\left[Q\left(\frac{d\xi}{dv}-\frac{dg}{f\,du}\eta\right)+gD\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\xi\right)\right]=0. \end{aligned}\right.$$

33. *Condition pour que le faisceau soit formé des normales à une surface. Théorème sur la transformation des faisceaux.* — Cherchons dans quelles conditions les droites (N) peuvent être les normales d'une surface.

Pour que cela ait lieu, il faut que les plans principaux soient rectan-

gulaires, c'est-à-dire que la somme des termes extrêmes de (12) doit être nulle. En remplaçant dans la condition $P\frac{dg}{f\,du}$, $Q\frac{df}{g\,dv}$ tirées des équations (9), on trouve facilement

$$(14) \qquad \frac{d}{dv}(\xi P - f\eta D) = \frac{d}{du}(\eta Q - g\xi D);$$

d'où résulte

$$P\xi - f\eta D = \frac{dZ}{du},$$

$$Q\eta - g\xi D = \frac{dZ}{dv}.$$

On peut arriver plus directement : en effet, supposons que les droites (N) soient normales à des surfaces et soit Z le ζ du point où (N) perce l'une d'entre elles. Il est visible que le ΔZ de ce point est constamment nul, quels que soient par conséquent du et dv.

Les formules (F) conduisent immédiatement aux équations trouvées ci-dessus.

La condition (14) permet d'établir une propriété intéressante. Supposons, en effet, que le réseau coordonné soit celui des lignes de courbure de (O), la condition devient

$$\frac{d}{dv}(P\xi) = \frac{d}{du}(Q\eta).$$

Or P et Q ne dépendant que de l'image sphérique des lignes de courbure, il en résulte :

Si l'on considère toutes les surfaces ayant même image sphérique de leurs lignes de courbure et que l'on construise par rapport à leurs normales des droites (N) *avec les mêmes* ξ *et* η, *tous les faisceaux de droites ainsi obtenues sont normaux à des surfaces, si l'un d'entre eux jouit de cette propriété.*

34. *Surfaces ayant même image sphérique que la surface de référence.* — Il est logique de chercher comment on peut trouver toutes les surfaces ayant même image sphérique que la surface de référence.

Supposons donc (N) normale à l'une de ces surfaces et soit Z le ζ instantané de celle-ci. On a d'abord, par rapport aux lignes de courbure,

$$\xi = \frac{dZ}{P\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{Q\,dv};$$

mais, dans l'espèce, l'équation (13) doit se réduire à

$$du\,dv = 0.$$

On doit donc avoir

$$(15) \qquad \frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\,\xi = \frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\,\eta = 0.$$

Substituant les valeurs de ξ et η en tenant compte des équations (9), on trouve

$$(16) \qquad \frac{d^2 Z}{du\,dv} = \frac{dZ}{du}\,\frac{dP}{P\,dv} + \frac{dZ}{dv}\,\frac{dQ}{Q\,du},$$

équation qui ne contient que les éléments de l'image sphérique. On peut donc supposer que (O) est la sphère; Z représentera alors la distance du centre de la sphère au plan tangent de la surface dérivée qui a pour image sphérique de ses lignes de courbure le réseau orthogonal (u, v).

On déduit sans peine de ce qui précède la propriété suivante :

Si l'on suppose divers mobiles de masses quelconques décrivant à la fois et parallèlement des trajectoires tracées sur des surfaces ayant même image sphérique de leurs lignes de courbure, le centre de gravité du système se déplace aussi sur une surface de même nature.

35. *Autre solution du même problème.* — Le même problème peut être abordé autrement; en effet, les équations (15) combinées donnent

$$\frac{d}{du}(g\eta) = \frac{d}{dv}(f\xi),$$

d'où résulte que l'on peut poser

$$\eta = -\frac{dA}{g\,dv}, \qquad \xi = -\frac{dA}{f\,du}.$$

Substituant dans l'une des équations (15), on trouve

$$(17) \qquad \frac{d^2A}{du\,dv} = \frac{dA}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{dA}{dv}\frac{dg}{g\,du}.$$

Il est facile de trouver le sens géométrique de la fonction A. Considérons une famille de sphères dont les centres soient sur (O) et dont les rayons R soient fonction de u et v; calculons les ξ et η de leur corde de contact (N), l'équation d'une sphère est

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2;$$

celle de la sphère infiniment voisine est

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = R^2 + 2R\Delta R.$$

On déduit, après substitution des valeurs (Φ), l'équation

$$du\left(fX + \frac{R\,dR}{du}\right) + dv\left(gY + \frac{R\,dR}{dv}\right) = 0.$$

D'où résulte, pour définir (N),

$$\xi = -\frac{R\,dR}{f\,du}, \qquad \eta = -\frac{R\,dR}{g\,dv}.$$

On voit que l'on peut écrire

$$2A = R^2.$$

D'où cette proposition :

Étant données deux surfaces ayant même image sphérique, les normales de l'une peuvent être considérées comme les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur l'autre.

36. *Rapprochement avec la théorie des systèmes triplement orthogonaux. Systèmes orthogonaux dans lesquels toutes les surfaces d'une famille ont même image sphérique.* — On remarquera que l'équation (17) n'est autre que celle à l'aide de laquelle on obtient une surface (S) infiniment voisine de (O) et faisant avec elle partie d'un système triplement orthogonal. Cette connexité singulière entre deux théories si distinctes conduit à d'intéressants développements; mais pour le moment nous ne poursuivrons qu'un cas particulier, celui où la surface (S), infiniment voisine de (O), a aussi même image sphérique de ses lignes de courbure.

Désignant par $Z\,d\rho$ le ζ de la surface (S) considérée comme ayant même image que (O), cette fonction satisfait à l'équation (16); on exprimera que (S) fait partie avec (O) d'un système triple orthogonal en écrivant que le segment de la normale à (O) prolongée jusqu'à (S) satisfait à l'équation (17). Mais ce segment ne diffère de $Z\,d\rho$ que d'une quantité du second ordre; on doit donc vérifier à la fois (16) et (17) en y substituant Z (car $d\rho$ disparaît).

On obtient, en retranchant (16) et (17) et tenant compte des équations de Codazzi,

$$g\frac{dP}{dv}\frac{dZ}{du} = f\frac{dQ}{du}\frac{dZ}{dv}. \tag{19}$$

Il convient pour réduire la question d'exprimer f et g en fonction de Z, P et Q; or on a

$$\frac{df}{dv} = g\frac{dP}{Q\,dv}, \qquad \frac{dg}{du} = f\frac{dQ}{P\,du}, \tag{20}$$

d'où résulte avec (19)

$$\frac{df}{f\,dv} = \frac{\dfrac{dQ}{Q\,du}\dfrac{dZ}{dv}}{\dfrac{dZ}{du}},$$

$$\frac{dg}{g\,du} = \frac{\dfrac{dP}{P\,dv}\dfrac{dZ}{du}}{\dfrac{dZ}{dv}};$$

mais, en vertu de (16), ceci peut s'écrire

$$\frac{df}{f\,dv} = \frac{d}{dv}\log\frac{dZ}{P\,du}, \qquad \frac{dg}{g\,du} = \frac{d}{du}\log\frac{dZ}{Q\,dv},$$

par conséquent

$$f = U\,\frac{dZ}{P\,du}, \qquad g = V\,\frac{dZ}{Q\,dv}.$$

Substituant dans les équations (20), Z s'élimine et il reste

$$\frac{d}{du}\frac{Q^2}{V} = \frac{d}{dv}\frac{P^2}{U}.$$

Il est clair qu'on peut particulariser les paramètres u et v de telle façon que U et V soient égaux à l'unité. On voit alors que la solution du problème est donnée par le système d'équations

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{du}Q^2 = \frac{d}{dv}P^2,\\ &f = \frac{dZ}{P\,du}, \qquad g = \frac{dZ}{Q\,dv},\\ &\frac{d^2Z}{du\,dv} = \frac{dZ}{du}\frac{dP}{P\,dv} + \frac{dZ}{dv}\frac{dQ}{Q\,du},\\ &PQ + \frac{d}{du}\left(\frac{dQ}{P\,du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{dP}{Q\,dv}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

La première de ces conditions peut s'écrire

$$P^2 = \frac{d\varphi}{du}, \qquad Q^2 = \frac{d\varphi}{dv}.$$

Ainsi l'image sphérique des lignes de courbure de (O) est telle que le dS^2 de la sphère prend la forme

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{du}du^2 + \frac{d\varphi}{dv}dv^2.$$

Lorsqu'on connaîtra sur la sphère un réseau satisfaisant à cette condition, on cherchera l'intégrale de (16) et chaque valeur de Z donnera une surface (O) répondant à la question.

Au point de vue analytique, la solution a été simplifiée autant que possible, mais elle peut être éclaircie encore au point de vue géométrique.

57. *Toute surface sur laquelle le* $dS^2 = \frac{d\varphi}{du}du^2 + \frac{d\varphi}{dv}dv^2$ *répond à la question.* — Cherchons à quelles conditions géométriques doit satisfaire chacune des surfaces (O) d'une famille (A) pour que : 1° toutes aient même image sphérique; 2° que (A) fasse partie d'un système triplement orthogonal.

La première des équations (21) peut s'écrire

$$\frac{dQ}{P\,du} = \frac{dP}{Q\,dv},$$

mais, comme dans l'espèce on suppose connues les trois équations de Codazzi, cela revient à dire que

$$\frac{dg}{f\,du} = \frac{df}{g\,dv},$$

par conséquent f^2 et g^2 sont les dérivées partielles d'une même fonction.

Je dis maintenant qu'il résulte de cette condition et des équations de Codazzi que

$$\frac{d}{dv}(fP) = \frac{d}{du}(gQ).$$

Si l'on développe, en tenant compte de (20), il vient

$$\frac{dP}{Q\,dv}(Qf + Pg) = \frac{dQ}{P\,du}(Qf + Pg),$$

d'où résulte, en effet, la condition fondamentale. On peut donc poser légitimement la seconde et la troisième équation du système (21); la quatrième résulte immédiatement de la substitution des valeurs de f et g dans une des équations (20). Quant à la cinquième équation, elle est supposée vérifiée d'avance, puisqu'on se donne (O).

On peut résumer ainsi qu'il suit tout ce qui précède :

Si le réseau des lignes de courbure d'une surface (O) *est tel que les coefficients du* dS^2 *soient les dérivées partielles d'une même fonction, on peut déduire de la surface toute une famille* (A) *faisant partie d'un système triplement orthogonal; toutes les surfaces de cette famille ont même image sphérique : le* dS^2 *de la sphère est de même forme que celui de chacune des surfaces considérées.*

Dans sa thèse sur les coordonnées curvilignes, M. Darboux a considéré le système composé de trois familles telles que (A) se coupant mutuellement à angle droit; il a trouvé que toutes les surfaces d'une même famille sont identiques. Il serait très simple de vérifier ce résultat à l'aide des formules du Chapitre précédent, mais cela nous écarterait trop de notre sujet.

58. *Si les droites d'un faisceau ont pour images principales sur* (O) *un réseau conjugué, elles sont les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur* (O). — Revenons aux formules générales et cherchons dans quelles conditions les images principales sur (O) du faisceau de droites (N) forment un réseau conjugué.

Combinant les formules (2) et (13), il vient simplement

$$\left[f\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right) - g\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\right](PQ - fgD^2) = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{d}{dv}(f\xi) = \frac{d}{du}(g\eta),$$

comme au n° **55**. Ainsi :

Lorsque les images principales d'un faisceau de droites (N) *forment un réseau conjugué sur la surface de référence* (O), *les droites peuvent être considérées comme les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur* (O).

39. *Relation entre les plans principaux du faisceau et les images principales.* — On peut faire encore une remarque qui complète le résultat précédent. Lorsqu'on suit une courbe de l'image principale, l'équation (9) est vraie, quelle que soit la valeur attribuée à ζ, puisque le plan tangent, tout le long de la génératrice, est le même; on peut donc écrire

$$\tang\theta = \frac{-f\mathrm{D}\,du + \mathrm{Q}\,dv}{\mathrm{P}\,du - g\mathrm{D}\,dv},$$

mais la condition (2), qui exprime que les deux directions du, dv, du', dv' sont conjuguées, peut s'écrire

$$\frac{f\,du'}{g\,dv'} + \frac{-f\mathrm{D}\,du + \mathrm{Q}\,dv}{\mathrm{P}\,du - g\mathrm{D}\,dv} = 0.$$

On a donc la relation

$$\tang\theta + \frac{f\,du'}{g\,dv'} = 0,$$

qui s'exprime géométriquement ainsi :

Lorsqu'on suit sur (O) *une courbe de l'image principale du faisceau* (N) (*quel qu'il soit*), *le plan tangent à la génératrice* N *est perpendiculaire à la droite conjuguée de la direction suivie.*

Cette proposition coïncide avec cette autre bien connue : le plan central d'une normalie contient la direction conjuguée de la base.

Dans le cas particulier que nous considérons, celui où l'image principale de (N) est conjuguée, on voit que les tangentes aux deux courbes images sont les normales aux plans principaux du faisceau (N). Le théorème énoncé au nº **38** donne l'intégrale de ces faisceaux.

40. *Si les cordes de contact de sphères sont normales à des surfaces, celles-ci ont même image sphérique que la surface de référence. Les normales d'une surface arbitraire sont les cordes de contact des sphères ayant leurs centres sur une sphère.* — Si les cordes de contact d'une famille de sphères sont normales à des surfaces, l'image principale doit à la fois être conjuguée et orthogonale :

elle coïncide donc avec le réseau des lignes de courbure de la surface de référence (O); de plus, les surfaces normales à (N) ont même image sphérique que (O).

En prenant pour variable le quarré du rayon de la sphère ayant son centre en O, on obtient immédiatement l'équation différentielle des surfaces ayant même image sphérique que (O); c'est ce qui a été fait au n° 35. On remarquera que l'emploi de cette variable (le rayon de la sphère) conduit à la détermination des droites N et qu'il faudrait encore faire une quadrature pour obtenir les surfaces normales à (N), tandis qu'en prenant pour variable le Z d'une surface normale à (N), tout se réduit à l'intégration de l'équation (16).

Il est facile de voir que (16) n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de (17). En effet, on peut considérer la sphère comme ayant même image sphérique que (O). Dès lors, si P^2 et Q^2 sont les coefficients du dS^2, rapporté à l'image sphérique de (O), on obtiendra toutes les surfaces ayant même image sphérique en intégrant l'équation

$$\frac{d^2 A}{du\,dv} = \frac{dA}{du}\frac{dP}{P\,dv} + \frac{dA}{dv}\frac{dQ}{Q\,du}.$$

On voit qu'ici A et Z peuvent être substitués l'un à l'autre. Ceci tient à deux choses :

1° *Lorsque des sphères ont leurs centres sur une sphère, leurs cordes de contact sont toujours normales à des surfaces;* en effet, l'image principale du faisceau (N), étant conjuguée, est forcément orthogonale, puisque (O) est sphérique; dès lors les plans principaux de (N) sont rectangulaires.

2° Les coordonnées du pied de la droite N sont

$$\xi = -\frac{R\,dR}{P\,du}, \qquad \eta = -\frac{R\,dR}{Q\,dv}, \qquad (\text{n}^\circ\ 35)$$

si l'on prend pour variable le rayon de la sphère, et

$$\xi = \frac{dZ}{P\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{Q\,dv}, \qquad (\text{n}^\circ\ 34)$$

si l'on prend pour variable le Z d'une surface normale à (N); on

voit donc que

$$\Delta Z + R\,\Delta R = 0,$$

d'où résulte

$$2Z + R^2 + C = 0;$$

mais on a supposé le rayon de la sphère égal à l'unité. Si on le désigne par a, on aura généralement

$$R^2 + 2aZ = 0,$$

où Z peut, si l'on veut, désigner la distance du centre de la sphère aux plans tangents d'une surface normale à (X) et R le rayon de la sphère dont X est la corde de contact.

11. *Examen de l'équation unique à laquelle se ramènent tous les problèmes précédents. Renvoi aux travaux de M. Moutard. Cas où le réseau des lignes de courbure est isométrique.* — On peut dire que la solution de tous les problèmes dont nous nous sommes occupé dans ce Chapitre et dans le précédent (recherche des surfaces ayant même image sphérique, des systèmes triplement orthogonaux, des sphères dont les cordes de contact sont normales à des surfaces) dépend de l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 Z}{du\,dv} = A\frac{dZ}{du} + B\frac{dZ}{dv}.$$

Il y a donc un intérêt véritable à faire l'étude de cette équation. M. Moutard a démontré qu'elle rentrait dans l'une des deux formes susceptibles d'intégration explicite et il a donné la marche à suivre pour obtenir les intégrales quand on peut les exprimer. La solution est formée, dans ce cas, par la somme d'une série de termes contenant individuellement deux fonctions arbitraires U et V et leurs dérivées successives. Les coefficients A et B satisfont à une série d'équations de condition limitée par le nombre de dérivées que contient l'intégrale. La dernière condition est toujours l'équation différentielle du λ de la sphère, dont l'intégrale a été trouvée par M. Liouville; toutes les autres conditions se déduisent consécutivement et sous forme explicite de la dernière.

Il serait fort intéressant d'appliquer cette théorie à la recherche des réseaux sphériques orthogonaux pour lesquels l'équation (16) est susceptible d'intégration explicite; mais nous nous bornerons à considérer le cas où l'on a

$$dS^2 = \lambda^2(u, v)(du^2\,U + dv^2\,V);$$

λ est une fonction de (u) et de (v), U et V sont certaines fonctions de u et v. L'équation (17) devient, dans ce cas particulier,

$$\frac{d^2 Z}{du\,dv} = \frac{d\lambda}{\lambda\,dv}\frac{dZ}{du} + \frac{dZ}{dv}\frac{d\lambda}{\lambda\,du};$$

mais si l'on pose

$$Z = MX,$$

on fera disparaître les dérivées premières de X en écrivant que M est égal à λ, alors

$$\frac{d^2 X}{X\,du\,dv} + \frac{d^2\lambda}{\lambda\,du\,dv} - \frac{2}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} = 0.$$

Il vient enfin l'équation

$$(22) \qquad \frac{d^2 X}{X\,du\,dv} = \frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)du\,dv} = \Omega.$$

42. *Intégrale lorsque le réseau sphérique est composé de cercles.* — Le cas le plus simple est celui où

$$\frac{d^2}{du\,dv}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0,$$

par conséquent,

$$\lambda = \frac{1}{U_1 + V_1}.$$

On voit facilement que le réseau (u et v) est composé de cercles géodésiques et, comme on le suppose tracé sur la sphère, il en résulte que l'on a immédiatement l'intégrale des surfaces ayant pour image

sphérique un réseau de cercles. Dans ce cas, l'intégrale est de la forme

$$X = U + V,$$

et l'on voit que les dérivées des fonctions arbitraires n'y figurent pas.

43. *Intégrale dans le cas où ne figurent dans son expression explicite que les dérivées premières des fonctions arbitraires.* — Le cas qu'il convient de considérer immédiatement après est celui où l'intégrale ne contient que les dérivées premières des fonctions arbitraires.

Posons donc, en supposant d'abord qu'il n'existe pas de fonction arbitraire de v,

$$X = AU + BU'.$$

Substituons dans (22), il vient

$$\left(\frac{d^2 A}{du\,dv} - \Omega A\right) U + \left(\frac{d^2 B}{du\,dv} - \Omega B + \frac{dA}{dv}\right) U' + \frac{dB}{dv} U'' = 0.$$

Mais cette équation doit être vérifiée quelles que soient U et ses dérivées : donc A et B doivent vérifier les équations

$$\frac{dB}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 B}{du\,dv} - \Omega B + \frac{dA}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 A}{du\,dv} - \Omega A = 0,$$

qui se transforment de la manière suivante

$$B = U_1,$$

$$A = U_1 \frac{d\Omega}{\Omega\,du} + U_1',$$

$$\frac{d^2 \log \Omega}{du\,dv} = \Omega. \tag{23}$$

C'est le moment de faire remarquer que l'équation (22) est absolument symétrique par rapport à X et $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, de telle sorte que la valeur la plus générale de λ est donnée par la formule

$$\frac{1}{\lambda} = \left(U_1 \frac{d\Omega}{\Omega\, du} + U_1'\right) U + U_1 U' + \left(V_1 \frac{d\Omega}{\Omega\, dv} + V_1'\right) V + V_1 V',$$

et, si l'on prend UU_1 et VV_1 comme fonctions arbitraires,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{d\Omega}{\Omega\, du} U + U' + \frac{d\Omega}{\Omega\, dv} V + V'.$$

L'équation (23) donne d'ailleurs

$$\Omega = \frac{2u'v'e^{u+v}}{(1-e^{u+v})^2},$$

où u et v ne coïncident pas avec les paramètres, obligatoirement; mais cette identification peut être toujours être faite, puisque l'on a supposé que les coefficients du dS^2 contenaient encore des fonctions de u et v mises en évidence. Au demeurant, la valeur la plus générale du λ devient

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{d}{u'\, du}(Uu') + \frac{d}{v'\, dv}(Vv') + (Uu' + Vv')\frac{1+e^{u+v}}{1-e^{u+v}}.$$

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES SURFACES A L'AIDE DES COORDONNÉES SPHÉRIQUES IMAGINAIRES.

44. *Équation de la variation du plan tangent à une normalie, valeur du dS^2 d'une surface.* — Nous avons établi dans le Chapitre précédent que l'on pouvait exprimer à chaque instant les coordon-

nées ξ, η et ζ d'un point d'une surface (N) à l'aide des dérivées partielles d'une même fonction prises par rapport à deux paramètres u et v définissant sur la sphère de rayon unité l'image du point N de (N). On peut déduire de cette proposition une méthode fort simple pour l'étude des surfaces, elle a quelques points communs avec le procédé imaginé par M. Ossian Bonnet (*Journal de Liouville*, 2e série, t. X).

Choisissons d'abord sur la sphère un réseau orthogonal isométrique pour (u, v) tel que

$$dS^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2).$$

Désignons par p la distance du centre de la sphère au plan tangent en N à (N). Soient ξ et η les coordonnées habituelles de la droite (N). soit enfin l la distance d'un point quelconque M de la droite au plan mené par le centre de la sphère parallèlement à celui des XY; la formule (9), qui donne la variation du plan tangent à une surface élémentaire déterminée par du et dv, devient ici

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{du\left(\dfrac{d\eta}{du} - \dfrac{d\lambda}{\lambda\, dv}\xi\right) + dv\left(\lambda l + \dfrac{d\lambda}{\lambda\, du}\xi + \dfrac{d\eta}{dv}\right)}{du\left(\lambda l + \dfrac{d\xi}{du} + \dfrac{d\lambda}{\lambda\, dv}\eta\right) + dv\left(\dfrac{d\xi}{dv} - \dfrac{d\lambda}{\lambda\, du}\eta\right)}.$$

Nous avons étudié jusqu'à présent cette formule en particularisant le réseau (u, v) qui était généralement celui de l'image sphérique de (N); il importe actuellement de rejeter au contraire toute particularisation tenant à (N) et de prendre pour les coordonnées de l'image celles qui conduisent aux résultats les plus simples dans l'étude de la sphère elle-même.

Dans cet ordre d'idées, il était naturel de prendre les coordonnées symétriques imaginaires, qui, on le sait depuis longtemps, introduisent une grande symétrie dans les calculs.

Nous avons démontré que

$$\xi = \frac{dp}{\lambda\, du}, \qquad \eta = \frac{dp}{\lambda\, dv};$$

posons

$$u + iv = x, \qquad u - iv = y,$$

$$\frac{dp}{\lambda^2 dx} = a, \qquad \frac{dp}{\lambda^2 dy} = b, \qquad \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2 p}{dx\, dy} = c;$$

il vient, après transformation,

$$\tang\theta = \frac{i\,du\left(\frac{da}{dx}-\frac{db}{dy}\right)+dv\left(l+2c-\frac{da}{dx}-\frac{db}{dy}\right)}{du\left(l+2c+\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}\right)+i\,dv\left(\frac{da}{dx}-\frac{db}{dy}\right)},$$

d'où résulte immédiatement

$$\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=\frac{(l+2c)(du+i\,dv)+2\frac{db}{dy}(du-i\,dv)}{(l+2c)(du-i\,dv)+2\frac{da}{dx}(du+i\,dv)},$$

et, finalement,

$$e^{-2i\theta}=\frac{dx\frac{da}{dx}+dy\left(c+\frac{l}{2}\right)}{dx\left(c+\frac{l}{2}\right)+dy\frac{db}{dy}}.$$

Telle est la forme remarquable que prend l'équation de la normalie à (N) dans ce nouveau système de coordonnées.

Le dS^2 de (N) se calcule sans difficulté en additionnant les carrés des ΔX, ΔY, ΔZ; on trouve

$$\frac{dS^2}{\lambda^2}=(p+2c)\left[2\frac{da}{dx}dx^2+(p+2c)\,dx\,dy+2\frac{db}{dy}dy^2\right]+4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}dx\,dy.$$

45. *Équation des lignes de courbure, des rayons de courbure principaux.* — Cherchons maintenant les éléments géométriques qui définissent la courbure de (N). Nous nous servirons encore de la formule de la normalie, qui à elle seule comprend tous ces résultats.

Si l'on suit une ligne de courbure de (N), l'angle θ doit rester le même, quelle que soit la hauteur l ou $c+\frac{l}{2}$: donc

$$(24)\qquad e^{-2i\theta}=\frac{dy}{dx}=\frac{dx\frac{da}{dx}}{dy\frac{db}{dy}}=\pm\sqrt{\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}}}\quad(^1).$$

(1) Soit Z la distance de chacun des points d'une surface (B) applicable sur

Pour trouver les rayons de courbure principaux, il faut exprimer que θ est, aux centres de courbure principaux, indépendant de $dx:dy$. On a donc

$$\frac{\dfrac{da}{dx}}{c+\dfrac{l}{2}}=\frac{c+\dfrac{l}{2}}{\dfrac{db}{dy}};$$

R, l'un des rayons de courbure, est égal à $p-l$, par conséquent

$$R^2-2R(2c+p)+(2c+p)^2-4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}=0.$$

Exprimons que deux directions déterminées par dx, dy et dx', dy' sont conjuguées; écrivons à cet effet que le plan tangent en N à la première normalie est le plan central de la seconde, soit

$$\frac{dx\,\dfrac{da}{dx}+dy\left(c+\dfrac{p}{2}\right)}{dx\left(c+\dfrac{p}{2}\right)+dy\,\dfrac{db}{dy}}+\frac{dy'}{dx'}=0,$$

---

une sphère, comptée jusqu'à un plan fixe, x et y désignant toujours les coordonnées symétriques imaginaires; posant

$$a=\frac{dZ}{\lambda^2\,dx},\qquad b=\frac{dZ}{\lambda^2\,dy},$$

on trouve pour l'équation des lignes de courbure de (B) en fonction de Z précisément la formule (24). Dès lors, on peut énoncer cette proposition :

Étant donnée une surface (B) *applicable sur une sphère, si l'on considère en chacun de ses points la distance à un plan fixe, qu'on déforme ensuite* (B) *de manière à la rendre sphérique, chaque point de* (B) *entraînant l'ordonnée correspondante, que celle-ci soit prise comme la distance du point de la sphère aux plans tangents d'une surface* (N), *l'image sphérique de* (N) *est formée par le réseau des lignes de courbure de* (B) *mise sous sa forme primitive.*

L'équation différentielle des surfaces telles que (N) n'est autre chose que la relation qui lie le Z d'une surface applicable sur la sphère aux éléments indéformables de celle-ci.

On arriverait à un théorème analogue au précédent si, au lieu de la distance à un plan, on considérait la distance à un point fixe.

d'où résulte, en développant,

$$\frac{da}{dx}\,dx\,dx' + \left(c + \frac{p}{2}\right)(dx\,dy' + dy\,dx') + \frac{db}{dy}\,dy\,dy' = 0.$$

On remarquera que dans toutes ces formules le λ de la sphère n'est nullement particularisé, qu'il peut figurer dans chaque question avec ses deux fonctions arbitraires ou sous sa forme la plus simple suivant qu'on le jugera plus avantageux.

Les équations de Codazzi se réduisent ici à la seule relation qui définit le λ, savoir

$$\lambda^2 + 2\frac{d^2}{dx\,dy}\log\lambda^2 = 0.$$

46. *Équation d'une sphère.* — Comme première application, cherchons l'équation d'une sphère considérée comme surface à rayons de courbure constants ou à lignes de courbure indéterminées; il est manifeste qu'on doit avoir à la fois

$$\frac{da}{dx} = 0, \qquad \frac{db}{dy} = 0,$$

ce qui conduit à

$$\frac{dp}{dx} = -Y_1\lambda^2 = 2Y_1\frac{d^2}{dx\,dy}\log\lambda^2,$$

partant

$$p = 2Y_1\frac{d\log\lambda^2}{dy} + Y_2.$$

De même, on doit avoir

$$p = 2X_1\frac{d\log\lambda^2}{dx} + X_2;$$

il faut remplacer λ^2 par sa valeur pour pouvoir identifier.

Posant

$$\lambda^2 = \frac{4X'Y'e^{X+Y}}{(1+e^{X+Y})^2},$$

nous en tirons

$$\frac{d\log\lambda^2}{dy} = \frac{Y''}{Y'} + Y'\frac{1-e^{X+Y}}{1+e^{X+Y}};$$

par conséquent, p devient

$$p = 2\mathrm{Y}_1 \frac{\mathrm{Y}''}{\mathrm{Y}'} + \mathrm{Y}_2 + 2\mathrm{Y}_1 \mathrm{Y}' \frac{1 - e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}}{1 + e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}}.$$

Cette équation devant être identique avec sa permutée en X, il vient pour p la valeur définitive

$$p = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}e^{\mathrm{X}} + \mathrm{C}e^{\mathrm{Y}} + \mathrm{D}e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}}{1 + e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}}.$$

Cette expression ne peut pas être transformée de façon à ne contenir que λ, puisque les dérivées X′ et Y′ n'y entrent pas.

47. *Surfaces à étendue minima.* — On obtiendra dans notre système de coordonnées l'équation différentielle des surfaces à étendue minima, en écrivant que le second terme de l'équation donnant les rayons de courbure principaux est nul, soit

$$\frac{2\,d^2 p}{p\,dx\,dy} + \lambda^2 = 0.$$

Mais si l'on se reporte aux calculs des nos **41** et **45**, on voit immédiatement que l'intégrale est

$$p = \mathcal{X}' + 2\mathcal{X}\frac{d\lambda}{\lambda\,dx} + \mathcal{Y}' + 2\mathcal{Y}\frac{d\lambda}{\lambda\,dy},$$

où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ désignent les deux fonctions arbitraires, simples fonctions de x et de y seules. On vérifie que les asymptotiques de ces surfaces sont rectangulaires.

Le $d\mathrm{S}^2$ des surfaces à étendue minima prend la forme

$$d\mathrm{S}^2 = 4\lambda^2 \frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\,dx\,dy,$$

d'où résulte ce théorème qui appartient à M. O. Bonnet :

Les lignes de longueur nulle (ou isotropes) d'une surface à étendue minima ont pour images les lignes isotropes de la sphère.

Il est facile de voir que les surfaces à étendue minima seules jouissent de cette propriété : en effet, toute surface sur laquelle ceci a lieu doit donner naissance à un dS^2 où ne figurent que des termes en $dx\,dy$, c'est-à-dire que (d'après la valeur générale du n° **44**)

$$(p+2c)\frac{da}{dx}=(p+2c)\frac{db}{dy}=0.$$

Il est clair qu'il ne faut pas considérer la solution

$$\frac{da}{dx}=\frac{db}{dy}=0,$$

puisqu'elle donne simplement une sphère; l'autre facteur donne les surfaces à étendue minima.

Notre but étant principalement d'exposer une méthode générale d'investigation, nous supprimerons toute recherche particulière de surfaces à étendue minima, bien que la forme de l'intégrale se prête facilement aux calculs.

Il résulte de ce qui précède que l'image sphérique de tout réseau isométrique tracé sur une surface à étendue minima est aussi isométrique. En particulier, le réseau des lignes de courbure est isométrique. Tout ceci sera généralisé plus loin.

48. *Équation différentielle d'une famille de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.* — L'équation des lignes de courbure d'une surface quelconque est tellement simple dans notre système de représentation qu'il devient naturel de chercher à former l'équation différentielle des familles de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.

Soit

$$p=f(x,y,z)$$

l'équation d'une famille de surfaces dont z est le paramètre individuel: p désigne comme d'habitude la distance d'une origine fixe aux

plans tangents, x et y sont les coordonnées imaginaires définissant la position de l'image sur la sphère.

Soient (N) et (N′) deux surfaces infiniment voisines, N et N′ les points correspondants situés sur une même trajectoire, soient enfin NT et N′T′ les tangentes aux lignes de courbure de même système passant par N et N′. M. Maurice Lévy a fait voir qu'il suffisait d'établir que les droites NT et N′T′ se rencontraient toujours (et seulement pour un système de lignes de courbure) pour trouver la condition cherchée.

Il ne serait pas difficile, dans notre système habituel, d'écrire que NT et N′T′ se rencontrent, mais il est plus simple d'employer l'artifice suivant :

Le long de la trajectoire NN′ les droites telles que NT forment une surface développable; dès lors, d'après la théorie des développées des courbes gauches, on voit que la variation de l'angle que fait NT avec le plan osculateur de la trajectoire NN′ est, le long de cette ligne, égale à l'angle de deux plans osculateurs consécutifs.

Désignons par n' l'image sphérique de N′; on voit que le plan mené par le centre de la sphère et On' est parallèle au plan osculateur de la trajectoire; par conséquent, l'angle de deux plans osculateurs consécutifs mesure la courbure géodésique de On'; appelons-le $d\gamma$. Soient β l'angle de On' avec OX, θ l'angle de NT avec OX, $\beta - \theta$ est l'angle que fait NT avec le plan osculateur en N de la trajectoire; on a donc

$$d\beta - d\theta = d\gamma.$$

Si dx et dy sont les accroissements de x et de y lorsqu'on passe de N en N′, on a, d'après Liouville,

$$d\gamma = d\beta - i\left(\frac{d\lambda}{\lambda\, dx}\, dx - \frac{d\lambda}{\lambda\, dy}\, dy\right).$$

On doit donc écrire

$$d\theta = i\left(\frac{d\lambda}{\lambda\, dx}\, dx - \frac{d\lambda}{\lambda\, dy}\, dy\right);$$

mais nous avons fait voir que l'on a pour une direction de ligne de

courbure

$$e^{-2i\theta} = \pm \sqrt{\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}}}.$$

Il en résulte immédiatement

$$-4i\,d\theta = \Delta \log \frac{\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}}$$

et, par conséquent,

$$dx \frac{d}{dx} \log\left(\frac{\lambda^4 \frac{db}{dy}}{\frac{da}{dx}}\right) - dy \frac{d}{dy} \log\left(\frac{\lambda^4 \frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}}\right) - dz\left(\frac{d}{dz} \log \frac{da}{dx} - \frac{d}{dz} \log \frac{db}{dy}\right) = 0.$$

Il faut maintenant exprimer dx, dy en fonction de dz, et nous y parviendrons en écrivant que les ΔX et ΔY du point N′ sont nuls

$$\Delta X = \Delta\xi + \frac{dx + dy}{2} \lambda p - \left(dx \frac{d\lambda}{dx} - dy \frac{d\lambda}{dy}\right)(a - b);$$

d'un autre côté,

$$\begin{aligned}\Delta\xi = \Delta\lambda(a + b) = \left(\frac{d\lambda}{dx} dx + \frac{d\lambda}{dy} dy\right)(a + b) + \lambda\left(\frac{da}{dz} + \frac{db}{dz}\right) dz \\ + \lambda\left[\left(\frac{da}{dx} + c\frac{2\,d\lambda}{\lambda\,dx} b\right) dx + \left(\frac{db}{dy} + c\frac{2\,d\lambda}{\lambda\,dy} a\right) dy\right],\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{\Delta X}{\lambda} = \left(c + \frac{p}{2}\right)(dx + dy) + \frac{da}{dx} dx + \frac{db}{dy} dy + \left(\frac{da}{dz} + \frac{db}{dz}\right) dz = 0.$$

On trouve de même

$$\frac{\Delta Y}{i\lambda} = -\left(c + \frac{p}{2}\right)(dx + dy) + \frac{da}{dx} dx - \frac{db}{dy} dy + \left(\frac{da}{dz} - \frac{db}{dz}\right) dz = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{da}{dx}\,dx + \left(c + \frac{p}{2}\right)dy + \frac{da}{dz}\,dz = 0,$$
$$\left(c + \frac{p}{2}\right)dx + \frac{db}{dy}\,dy + \frac{db}{dz}\,dz = 0.$$

Éliminant dx, dy, dz, il vient l'équation symbolique

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d}{dx}\log\left(\dfrac{\lambda^4\dfrac{db}{dy}}{\dfrac{da}{dx}}\right) & \dfrac{d}{dy}\log\left(\dfrac{\dfrac{db}{dy}}{\lambda^4\dfrac{da}{dx}}\right) & -\dfrac{d}{dz}\log\dfrac{\dfrac{da}{dx}}{\dfrac{db}{dy}} \\ \dfrac{da}{dx} & \left(c+\dfrac{p}{2}\right) & \dfrac{da}{dz} \\ \left(c+\dfrac{p}{2}\right) & \dfrac{db}{dy} & \dfrac{db}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime la condition cherchée; on voit qu'elle est du troisième ordre, ainsi que l'avait établi M. Ossian Bonnet.

49. *Système triplement orthogonal dans lequel une famille de surfaces est formée de surfaces à étendue minima.* — Si l'on veut traiter des cas particuliers, il faut naturellement chercher à annuler le plus de termes qu'il sera possible du déterminant. Dans cet ordre d'idées, on est conduit à examiner le cas où

$$c + \frac{p}{2} = 0.$$

La famille de surfaces ne doit comprendre que des surfaces à étendue minima. Si l'on met le dS^2 de la sphère sous sa forme la plus simple

$$dS^2 = \frac{-4}{(x+y)^2}\,dx\,dy;$$

alors

$$p = X' + Y' - 2\frac{(X+Y)}{(x+y)},$$
$$-4\frac{da}{dx} = X'''(x+y)^2,$$
$$-4\frac{da}{dy} = Y'''(x+y)^2.$$

Désignant par X_p^n la dérivée de X prise n fois par rapport à x et p fois par rapport à z, l'équation de condition devient

$$\left[X_1'' - \frac{2X_1'}{x+y} + 2\frac{X_1+Y_1}{(x+y)^2}\right]\frac{1}{X'''}\left[\frac{4}{(x+y)} + \frac{X^{IV}}{X'''}\right]$$
$$- \left[Y_1'' - \frac{2Y_1'}{(x+y)} + 2\frac{X_1+Y_1}{(x+y)^2}\right]\frac{1}{Y'''}\left[\frac{4}{(x+y)} + \frac{Y^{IV}}{Y'''}\right] - \left(\frac{X_1'''}{X'''} - \frac{Y_1'''}{Y'''}\right) = 0,$$

qui doit être vérifiée quels que soient x et y.

50. *Retour à la théorie des surfaces sur lesquelles*

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{du}du^2 + \frac{d\varphi}{dv}dv^2,$$

par rapport aux lignes de courbure. — On est aussi conduit à considérer le cas où

$$\frac{d}{dz}\log\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}} = 0.$$

C'est celui que nous avons étudié au n° **36**, mais il n'y a pas intérêt à traiter la question de nouveau.

Remarquons, à propos de ces surfaces intéressantes, qu'il est un cas assez étendu où leur détermination devient plus simple; c'est celui où le dS^2 peut s'écrire à la fois

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{du}du^2 + \frac{d\varphi}{dv}dv^2 = \lambda^2(du^2\,U + dv^2\,V).$$

Il en résulte

$$U\frac{d\lambda}{dv} = \frac{d\lambda}{du}V,$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\lambda = F\left(\int V\,dv + \int U\,du\right);$$

λ doit donc être fonction de la somme de deux fonctions de u et v seules.

Réciproquement, le λ étant sous la forme

$$dS^2 = F(U + V)(du^2 U_1 + dv^2 V_1),$$

on peut toujours le mettre sous la forme

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{dU_2} \overline{dU_2}^2 + \frac{d\varphi}{dV_2} \overline{dV_2}^2.$$

En effet, si l'on pose

$$F(U + V) U_1 = \frac{d\varphi}{du} U'_2,$$

$$F(U + V) V_1 = \frac{d\varphi}{dv} V'_2,$$

ces équations seront possibles, si l'on peut avoir

$$\frac{U'_2 U'}{U_1} = \frac{V'_2 V'}{V_1},$$

en choisissant convenablement U'_2 et V'_2, ce qui se vérifie.

On voit par cette remarque que les surfaces du second degré, celles dont les lignes de courbure sont des cercles géodésiques, peuvent faire partie d'un système triplement orthogonal où toutes les surfaces de la même famille ont même image sphérique.

On sait qu'à toute surface dont le réseau des lignes de courbure est isotherme correspond une autre surface jouissant de la même propriété, les λ des deux surfaces étant réciproques. Cette transformation, laissant toujours le λ fonction de $U + V$ quand il l'est tout d'abord, transforme les surfaces dont nous nous occupons en d'autres surfaces de la même espèce.

31. *Étant donné un réseau sphérique par rapport auquel*

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{du} du^2 + \frac{d\varphi}{dv} dv^2,$$

on connaît deux surfaces l'admettant pour image sphérique. De toute surface qui l'admet pour image on déduit, à l'aide de quadratures, une autre surface jouissant de la même propriété. — Ajoutons enfin que l'équation des surfaces ayant même image sphérique

qu'une de nos surfaces, pouvant s'écrire

$$2\frac{d^2Z}{du\,dv}=\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\left(\frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{d\varphi}{du}}+\frac{\frac{dZ}{dv}}{\frac{d\varphi}{dv}}\right),$$

il suffit d'égaler Z à φ pour avoir une solution du problème; mais cette valeur de Z conduit à trouver une surface sur laquelle le dS^2 a la forme voulue; dès lors on doit trouver immédiatement une seconde solution du problème.

Ceci se vérifie d'une façon fort intéressante. Nous pouvons immédiatement former le dS^2 de la surface correspondant à la valeur $Z=\varphi$, car on a

$$\Delta X = du\left[PZ+\frac{d}{du}\left(\frac{\lambda Z}{P\,du}\right)+\frac{dP}{Q\,dv}\frac{dZ}{Q\,dv}\right]$$

$$=\frac{du}{2\sqrt{\frac{d\varphi}{du}}}\frac{d}{du}\left(\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}\right)=\frac{du}{2\sqrt{\frac{d\varphi}{du}}}\frac{dZ}{du},$$

$$\Delta Y = dv\left[QZ+\frac{d}{dv}\left(\frac{dZ}{Q\,dv}\right)+\frac{dQ}{P\,du}\frac{dZ}{P\,du}\right]$$

$$=\frac{dv}{2\sqrt{\frac{d\varphi}{dv}}}\frac{d}{dv}\left(\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}\right)=\frac{dv}{2\sqrt{\frac{d\varphi}{dv}}}\frac{dZ}{dv},$$

puisque P^2 et Q^2 sont égaux à $\frac{d\varphi}{du}$ et $\frac{d\varphi}{dv}$, Z étant égal à φ. Mais, d'après la théorie même des surfaces en question, on sait que, si l'on pose

$$Z=\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv},$$

Ψ désignant une nouvelle fonction de u et de v,

$$\frac{\left(\frac{dZ}{du}\right)^2}{4\frac{d\varphi}{du}}=\frac{d\Psi}{du},\qquad \frac{\left(\frac{dZ}{dv}\right)^2}{4\frac{d\varphi}{dv}}=\frac{d\Psi}{dv}.$$

Égalant les deux valeurs qui en résultent pour $\dfrac{d^2\Psi}{du\,dv}$, il vient

$$2\,\frac{d^2 Z}{du\,dv}\left(\frac{\dfrac{dZ}{du}}{\dfrac{d\varphi}{du}}-\frac{\dfrac{dZ}{dv}}{\dfrac{d\varphi}{dv}}\right)=\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\left[\frac{\left(\dfrac{dZ}{du}\right)^2}{\left(\dfrac{d\varphi}{du}\right)^2}-\frac{\left(\dfrac{dZ}{dv}\right)^2}{\left(\dfrac{d\varphi}{dv}\right)^2}\right].$$

Or, si l'on supprime le facteur commun, qui ne peut être nùl que dans le cas très particulier où

$$\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}=F(\varphi),$$

il reste

$$2\,\frac{d^2 Z}{du\,dv}=\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\left(\frac{\dfrac{dZ}{du}}{\dfrac{d\varphi}{du}}+\frac{\dfrac{dZ}{dv}}{\dfrac{d\varphi}{dv}}\right).$$

On voit que la quantité $\varphi^2+\dfrac{d\varphi}{du}+\dfrac{d\varphi}{dv}$ est aussi solution de l'équation (16). Remplaçant Z par cette valeur dans la formule précédente, on trouve l'équation différentielle qui détermine φ; elle coïncide d'ailleurs avec celle que l'on obtient directement en remplaçant P et Q par leurs valeurs en φ dans la première des équations de Codazzi.

Donc : *Toutes les fois qu'on a tracé sur la sphère un réseau orthogonal tel que les coefficients du* dS^2 *soient les différentielles partielles d'une même fonction, on a sans quadratures deux surfaces dont ce réseau est l'image.*

D'ailleurs, dans le cas général, si Z est solution de (16), le dS^2 de la surface correspondante peut s'écrire

$$\frac{du^2}{\dfrac{d\varphi}{du}}\left[\frac{d}{du}\left(Z\varphi+\frac{dZ}{du}+\frac{dZ}{dv}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{dZ}{du}}{\dfrac{d\varphi}{du}}\,\frac{d}{du}\left(\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}\right)\right]^2$$
$$+\frac{dv^2}{\dfrac{d\varphi}{dv}}\left[\frac{d}{dv}\left(Z\varphi+\frac{dZ}{du}+\frac{dZ}{dv}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{dZ}{dv}}{\dfrac{d\varphi}{dv}}\,\frac{d}{dv}\left(\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}\right)\right]^2;$$

mais, d'après les résultats du n° **36**, on voit que, si ζ désigne en chaque point la distance de la surface à celle qui lui est infiniment voisine dans le système triplement orthogonal, on a

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{d}{du}\left(Z\varphi + \frac{dZ}{du} + \frac{dZ}{dv}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{d\varphi}{du}}\,\frac{d}{du}\left(\varphi^2 + \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)$$

et l'équation symétrique; de telle sorte que par une simple quadrature on trouvera ζ.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DES DÉVELOPPÉES MOYENNES.

32. *Départ entre les propriétés indéformables et celles qui tiennent à la représentation sphérique.* — On voit par ce qui précède combien la notion de la représentation sphérique des surfaces est féconde; nous n'avons pas encore terminé la revue des propriétés générales des surfaces qui en dérivent, et l'on verra dans le courant de ce travail s'accentuer plus encore l'importance de l'idée de Gauss relative au départ entre les propriétés indéformables (si l'on peut ainsi désigner celles qui tiennent aux éléments indéformables) et celles de l'image sphérique. Ce Chapitre sera consacré à l'étude des *développées moyennes* des surfaces dont la notion se rattache directement à la représentation sphérique.

33. *Transformation des surfaces, les plans tangents restant parallèles, fonction géométrique invariante.* — Prenons pour réseau (u, v) celui des lignes de courbure de la surface de référence (O) et considérons encore un faisceau de droites (N) parallèles aux normales de (O). Soit Z la distance au plan tangent en O du point situé sur N à égale distance des foyers de cette droite, la formule (11) donne

$$-2Z = \frac{f}{P} + \frac{g}{Q} + \frac{1}{P}\left(\frac{d\xi}{du} + \frac{dP}{Q\,dv}\,\eta\right) + \frac{1}{Q}\left(\frac{d\eta}{dv} + \frac{dQ}{P\,dv}\,\xi\right).$$

Considérons maintenant, d'une part le plan perpendiculaire à OZ et également distant des centres de courbure de (O), et d'autre part le plan moyen du faisceau des droites (N), que nous définirons le plan perpendiculaire à N et à égale distance des foyers de cette droite; soit ζ la distance de ces deux plans moyens : la formule précédente donne

$$(25) \qquad -2\zeta = \frac{1}{P}\left(\frac{d\xi}{du} + \frac{dP}{Q\,dv}\eta\right) + \frac{1}{Q}\left(\frac{d\eta}{dv} + \frac{dQ}{P\,dv}\xi\right).$$

Or l'on remarquera que cette équation ne contient ni f ni g.

Faisons correspondre au faisceau (N) dérivé de (O) un faisceau (N') dérivé de la même manière de la sphère de rayon unité, c'est-à-dire construisons avec les mêmes ξ et η une droite N' dérivée de la normale à la sphère, en prenant pour réseau (u, v) l'image sphérique de celui des lignes de courbure de (O), et la droite N dérivée de la normale à (O), comme il a été dit plus haut. Il est clair, d'après la formule (25), que la valeur du ζ est la même dans les deux cas. Or les lignes de courbure et leur image sphérique n'entrent ici que pour la forme, car le ζ relatif au faisceau (N') est manifestement indépendant du réseau orthogonal particulier qui nous a permis de trouver sa valeur.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Soient deux surfaces (O) *et* (O') *que l'on fait correspondre par parallélisme de leurs plans tangents et deux faisceaux de droites* (N) *et* (N') *associés aux normales de* (O) *et de* (O') *de telle façon que chaque couple soit à chaque instant superposable et parallèle à l'autre couple : la distance des deux plans moyens de chaque couple est la même.*

La démonstration résulte de ce qui précède et si l'on prend comme intermédiaire à (O) et (O') la sphère de rayon unité.

34. *Cas de deux faisceaux symétriques par rapport aux points de la surface de référence.* — Supposons en particulier que (O) et (O') coïncident, mais que les droites (N) et (N'), au lieu de coïncider, soient symétriques par rapport à l'origine O; il faut dans ce cas

changer les signes de ξ et η dans l'équation : donc les ζ sont égaux et de signes contraires, pour les deux faisceaux. On déduit sans peine de cette remarque la propriété suivante :

Si deux faisceaux de droites (N) *et* (N′) *sont parallèles aux normales d'une surface* (O) *et symétriques par rapport à celles-ci, que l'on joigne entre eux les points milieux des segments focaux, la droite ainsi obtenue rencontre la normale de* (O) *en un point situé à égale distance des centres de courbure principaux.*

55. *Développée moyenne d'une surface et développante. Définitions. On connaît toutes les surfaces ayant même développée moyenne qu'une surface donnée.* — Les considérations précédentes nous amènent à faire l'étude de la surface (D) qui a pour plans tangents les plans moyens des normales d'une surface donnée (O). Nous dirons que (D) est la développée moyenne de (O) et, par abréviation, nous dirons que (O) est la développante de (D).

S'il y a quelque analogie entre le lieu des centres de courbure principaux d'une surface et la première développée d'une courbe plane, on accordera qu'elle ne se poursuit guère analytiquement. En revanche, il existe une similitude très étroite entre la seconde développée d'une courbe plane et ce que nous définissons la développée moyenne d'une surface.

Cherchons quelles sont les surfaces ayant même développée moyenne que la surface de référence. Il est clair qu'on a

$$\frac{1}{P}\left(\frac{d\xi}{du}+\frac{dP}{Q\,dv}\eta\right)+\frac{1}{Q}\left(\frac{d\eta}{dv}+\frac{dQ}{P\,dv}\xi\right)=0.$$

Mais il faut exprimer que les ξ et η correspondent aux normales d'une surface, c'est-à-dire que

$$\xi=\frac{dZ}{P\,du},\qquad \eta=\frac{dZ}{Q\,dv};$$

la condition devient

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{P}{Q}\frac{dZ}{dv}\right)+\frac{d}{du}\left(\frac{Q}{P}\frac{dZ}{du}\right)=0.$$

Or, si l'on cherchait quelles sont les surfaces ayant même développée moyenne que la sphère de rayon unité, en considérant comme réseau de ses lignes de courbure celui des (u), (v), on trouverait manifestement l'équation précédente. Donc la solution du problème général ne dépend que du cas relatif à la sphère; mais dans ce cas le problème n'a aucun lien qui le rattache aux lignes de courbure : on peut donc supposer celles-ci isométriques, ce qui donne l'équation intégrable immédiatement

$$\frac{d^2 Z}{du^2} + \frac{d^2 Z}{dv^2} = 0.$$

De ceci résulte qu'*on peut construire toutes les surfaces ayant même développée moyenne qu'une surface donnée.*

56. *Intégrale à l'aide des coordonnées imaginaires sphériques des surfaces ayant même développée moyenne qu'une surface donnée.* — Le système des coordonnées sphériques étudié dans le Chapitre précédent prend ici une importance capitale. Si R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure d'une surface dont l'équation est

$$p = f(x, y),$$

nous avons vu que

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy} + p.$$

Si l'on désigne par l la distance de l'origine au plan moyen,

$$l = -\frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy}.$$

Veut-on exprimer que deux surfaces ont même développée moyenne, p et p_1 désignant les distances du centre de la sphère à leurs plans tangents, on doit avoir

$$\frac{2\,d^2 p_1}{\lambda^2\,dx\,dy} = \frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy};$$

d'où résulte

$$p_1 = p + X + Y.$$

Telle est l'intégrale explicite du problème, dont l'existence avait été établie au numéro précédent.

57. *On obtient par deux quadratures les développantes d'une surface donnée.* — Cherchons maintenant les surfaces qui ont pour développée moyenne une surface donnée; soit p_1 la distance de l'origine aux plans tangents de la développante, il faut poser

$$\frac{d^2 p_1}{dx\,dy} + \frac{\lambda^2}{2} f(x, y) = 0.$$

Mais, λ étant une simple fonction de x et de y, l'équation précédente peut toujours s'intégrer. Ainsi :

On obtient les développantes d'une surface donnée par deux quadratures, lorsque l'équation de la surface est résolue par rapport à p, distance d'une origine fixe à ses plans tangents.

Ce théorème, d'une extrême simplicité, justifie ce que nous avons annoncé touchant l'analogie qui existe entre les développées moyennes des surfaces et les développées secondes des courbes planes. Quand on met l'équation d'une courbe plane sous la forme

$$p = f(\theta),$$

où θ est l'angle de la normale avec une direction fixe, on trouve pour l'équation de la développante du second ordre

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} + f(\theta) = 0,$$

dont l'intégrale s'obtient par deux quadratures.

58. *Développantes d'une sphère. Lignes de courbure.* — Passons en revue quelques surfaces dont les développées moyennes sont simples. Supposons le λ de la sphère pris sous la forme

$$\lambda = \frac{2i}{x + y}.$$

Cherchons la développante d'une sphère de rayon $\frac{K}{2}$. En prenant le

centre de celle-ci pour origine, il vient pour l'équation du problème

$$\frac{d^2 p}{dx\, dy} - \frac{K}{(x+y)^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$p = -K \log(x+y) + X + Y.$$

On peut profiter de l'indétermination de X et Y pour trouver certaines développantes dont les lignes de courbure s'intègrent. Formons $\frac{da}{dx}$ et $\frac{db}{dy}$ (n° 45), il vient

$$-4\frac{da}{dx} = \left[\sqrt{X''}(x+y) + \frac{X'}{\sqrt{X''}}\right]^2 - K - \frac{X'^2}{X''},$$

$$-4\frac{db}{dy} = \left[\sqrt{Y''}(x+y) + \frac{Y'}{\sqrt{Y''}}\right]^2 - K - \frac{Y'^2}{Y''}.$$

Supposons d'abord

$$\frac{X'^2}{X''} + K = \frac{Y'^2}{Y''} + K = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{1}{X'} = \frac{x+C}{K}, \qquad \frac{1}{Y'} = \frac{y+D}{K},$$

on trouve alors

$$+4\frac{da}{dx} = K\frac{(y-C)^2}{(x+C)^2}, \qquad 4\frac{db}{dy} = K\frac{(x-D)^2}{(y+D)^2},$$

$$p = -K \log\frac{(x+y)}{(x+C)(y+D)} + M.$$

L'équation des lignes de courbure devient

$$\frac{dy}{(y-C)(y+D)} \pm \frac{dx}{(x-D)(x-C)} = 0.$$

dont les intégrales sont

$$\frac{(y-C)(x-D)}{(y+D)(x+C)} = A, \qquad \frac{(y-C)(x+C)}{(y+D)(x-D)} = B.$$

On a pour les rayons de courbure principaux, en général,

$$R_1 + R_2 = 2(2c + p), \qquad (R_1 - R_2)^2 = 16 \frac{da}{dx} \frac{db}{dy},$$

d'où résulte, dans l'espèce,

$$R_1 + R_2 = 2M - K - 2K \log \frac{x+y}{(x+C)(y+D)},$$
$$R_1 - R_2 = K \frac{(y-C)(x-D)}{(x+C)(y+D)}.$$

On voit que le long des lignes de courbure d'un même système la différence des rayons de courbure principaux est constante, mais comme la somme ne l'est pas, les surfaces trouvées ne sont pas de révolution.

59. *Développantes d'un point. Correspondance sur la sphère de deux points, les aires décrites étant égales.* — Comme second cas, plus particulier encore, supposons que K soit nul, c'est-à-dire cherchons les surfaces dont tous les plans moyens passent par un point fixe. On a

$$p = X + Y.$$

L'équation quadratique des lignes de courbure devient

$$dx^2[2X' + X''(x+y)] = dy^2[2Y' + Y''(x+y)],$$

et, si l'on suppose

$$X = -\frac{C}{x}, \qquad Y = -\frac{D}{y},$$

l'intégrale est

$$\sqrt{\frac{C}{x}} \pm \sqrt{\frac{D}{y}} = A.$$

La surface n'est pas non plus de révolution; ses normales jouissent d'une propriété géométrique simple. Si l'on décrit une sphère de rayon quelconque ayant pour centre l'origine, chacune des normales à la surface considérée rencontre la sphère en deux points; ceux-ci décrivent

des contours conjugués qui, s'ils sont fermés, embrassent des aires sphériques égales.

60. *Développantes des surfaces à étendue minima. Lignes de courbure.* — Cherchons maintenant les développantes des surfaces à étendue minima; on a, pour ces dernières,

$$p = X' + Y' - 2\frac{X + Y}{(x + y)};$$

dès lors l'équation différentielle de la développante est

$$\frac{d^2 p}{dx\, dy} - \frac{2(X' + Y')}{(x + y)^2} + 4\frac{(X + Y)}{(x + y)^3} = 0,$$

et l'on trouve pour intégrale

$$\frac{p}{2} = -\frac{(X + Y)}{(x + y)} + X_1 + Y_1,$$

où X_1 et Y_1 sont les deux fonctions arbitraires de la développante.

L'équation des lignes de courbure est

$$dx^2[X'' - 2X_1' - X_1''(x + y)] = dy^2[Y'' - 2Y_1' - Y_1''(x + y)].$$

Première hypothèse :

$$X_1'' = Y_1'' = 0.$$

Les lignes de courbure sont données par la formule

$$\int dx\sqrt{X'' - 2A} \pm \int dy\sqrt{Y'' - 2B} = 0.$$

Deuxième hypothèse :

$$X'' - X_1' - \frac{d}{dx}(X_1' x) = 0,$$

$$Y'' - Y_1' - \frac{d}{dy}(Y_1' y) = 0.$$

On trouve les intégrales

$$X_1 = \frac{X + Ax + B}{x}, \qquad Y_1 = \frac{Y + Cy + D}{y},$$

$$\frac{p}{2} = -\frac{(X + Y)}{x + y} + \frac{X + Ax + B}{x} + \frac{Y + Cy + D}{y},$$

et, pour les lignes de courbure

$$\int dx \sqrt{\frac{X_1''}{x}} \pm \int dy \sqrt{\frac{Y_1''}{y}} = 0.$$

Supposons enfin

Troisième hypothèse :

$$X'' - 2X_1' = KX_1,$$

$$Y'' - 2Y_1' = KY_1''.$$

Les lignes de courbure ont pour intégrale

$$\int dx \sqrt{X_1''} \pm \int dy \sqrt{Y_1''} = 0.$$

61. *Surfaces réciproques, l'une étant la développée moyenne de l'autre. Intégrale particulière.* — Nous dirons que deux surfaces sont réciproques si l'une est la développée moyenne de l'autre. L'équation différentielle de ces surfaces peut s'écrire

$$p = \frac{4}{\lambda^2} \frac{d^2}{dx\,dy}\left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy}\right),$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2}{dx\,dy}\left(\frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy} + p\right) - \left(\frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy} + p\right) = 0,$$

et l'on voit clairement que les surfaces à étendue minima répondent à la question. De même, les surfaces définies par l'équation

$$\frac{2\,d^2 p}{\lambda^2\,dx\,dy} - p = 0$$

sont réciproques de leurs développées moyennes. L'équation générale étant du quatrième ordre et linéaire, si l'on avait l'intégrale de celle qui précède, il suffirait de l'ajouter à celle des surfaces à étendue minima pour avoir la solution complète. On obtient pourtant la réduction du problème au second ordre, soit directement, d'après cette remarque, soit en effectuant une première intégration, qui amène

$$\frac{2}{\lambda^2}\frac{d^2p}{dx\,dy} - p = X'_1 + Y'_1 + 2X_1\frac{d\lambda}{\lambda\,dx} + 2Y_1\frac{d\lambda}{\lambda\,dy},$$

puis posant

$$p = X - \frac{1}{2}(X'_1 + Y'_1) - X_1\frac{d\lambda}{\lambda\,dx} - Y_1\frac{d\lambda}{\lambda\,dy},$$

il reste, comme il était annoncé,

$$\frac{2\,d^2X}{\lambda^2\,dx\,dy} - X = 0.$$

L'intégrale de cette équation n'est pas exprimable explicitement dans sa généralité, mais on peut en trouver une intégrale particulière avec des constantes arbitraires. Prenons, en effet, le λ sous sa forme la plus simple et posons

$$x + y = Z, \qquad x - y = t;$$

il vient alors

$$\frac{d^2X}{dx\,dy} - \frac{\lambda^2}{2}X = \frac{d^2X}{dZ^2} - \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{2X}{Z^2} = 0.$$

Cherchons les valeurs pour lesquelles $\frac{d^2X}{dt^2}$ est identiquement nul, c'est-à-dire de la forme

$$X = Z_1 t + Z_2,$$

où Z_1 et Z_2 représentent deux fonctions de Z seul, qui sont manifestement racines de l'équation

$$\frac{d^2X}{dZ^2} + \frac{2X}{Z^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$X = e^{\frac{1}{2}lZ}\left(M\cos\frac{\sqrt{7}}{2}lZ + N\sin\frac{\sqrt{7}}{2}lZ\right).$$

On déduit facilement de ce qui précède l'intégrale particulière suivante de l'équation des surfaces réciproques

$$p = \sqrt{(x+y)}\left\{\cos\frac{\sqrt{7}}{2}l(x+y)[A(x-y)+B]\right.$$
$$\left.+\sin\frac{\sqrt{7}}{2}l(x+y)[C(x-y)+D]\right\} - 2\frac{(X+Y)}{(x+y)} + X + Y,$$

et l'on sait qu'on ne peut écrire explicitement l'intégrale générale.

62. *Intégrale des surfaces identiques à leurs développées moyennes.* — On peut manifestement chercher, à propos des développées moyennes, des propriétés analogues à celles dont M. Puiseux s'est occupé relativement aux développées successives des courbes planes. Demandons-nous, par exemple, quelles sont les surfaces identiques à leurs développées moyennes.

Soient (N) et (D) deux de ces surfaces; si l'on choisit deux origines convenables O″ et O′, il est clair que les distances respectives de ces points aux plans tangents à (N) et (D) doivent être toujours égales. Or le p d'une sphère réduite au point O′ peut être supposé égal à

$$p = \frac{K}{(x+y)}.$$

De telle sorte que l'équation différentielle cherchée est

$$p + \frac{2d^2p}{\lambda^2\,dx\,dy} + \frac{K}{(x+y)} = 0.$$

Il suffira de trouver une solution particulière pour ramener le problème à la recherche des surfaces à étendue minima. Cherchons les valeurs de p qui sont simplement fonction de $Z = (x+y)$; dans cette hypothèse,

$$p - \frac{Z^2}{2}\frac{d^2p}{dZ^2} + \frac{K}{Z} = 0.$$

On satisfait à cette équation au moyen de l'expression

$$p = AZ^2 + \frac{B}{Z},$$

où A et B sont des fonctions de Z déterminées par les équations

$$Z^2 \frac{dA}{dZ} + \frac{1}{Z} \frac{dB}{dZ} = 0,$$

$$-2Z \frac{dA}{dZ} + \frac{1}{Z^2} \frac{dB}{dZ} + \frac{2K}{Z^3} = 0,$$

que l'on vérifiera en posant

$$A = -\frac{2}{9} \frac{K}{Z^3},$$

$$B = -\frac{2}{3} K \log Z.$$

On a donc la solution particulière

$$p = -\frac{2}{9} \frac{K}{(x+y)} - \frac{2}{3} \frac{K}{(x+y)} \log(x+y),$$

d'où se déduit l'intégrale générale

$$p = -\frac{2}{3} \frac{K}{(x+y)} \left[\frac{1}{3} + \log(x+y) \right] + X' + Y' - \frac{2(X+Y)}{(x+y)}.$$

On peut, par un simple transport de l'origine, réduire cette équation à la forme

$$p = -\frac{2K}{3(x+y)} \log(x+y) + X' + Y' - 2\frac{(X+Y)}{(x+y)}.$$

On trouve pour l'équation des lignes de courbure

$$dx^2 \left[\frac{K}{(x+y)^3} + \frac{3X'''}{2} \right] = dy^2 \left[\frac{K}{(x+y)^3} + \frac{3Y'''}{2} \right],$$

qui s'intègre si X''' et Y''' sont nuls; dans ce cas on trouve aussi les asymptotiques, car leur équation est

$$dx^2 \left[\frac{K}{(x+y)^3} + \frac{3X'''}{2} \right] + dx\,dy \frac{6K}{(x+y)^3} + dy^2 \left[\frac{K}{(x+y)^3} + \frac{3Y'''}{2} \right] = 0.$$

65. *La cyclide de Dupin et sa développée moyenne ont même image sphérique.* — Nous pourrions chercher aussi des exemples

dans lesquels nous ferions entrer en ligne de compte la courbure des développées moyennes, mais pour ne pas allonger ce Chapitre nous nous bornerons à faire l'étude de la développée moyenne d'une *cyclide*.

Si l'on prend pour réseau coordonné celui des lignes de courbure, on a (O. Bonnet, *Mémoires sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, p. 120)

$$f = \frac{U}{u - v}, \qquad g = \frac{V}{u - v},$$
$$P = \frac{vU}{u - v}, \qquad Q = \frac{uV}{u - v}.$$

Le ζ de la développée moyenne est donné par la formule

$$\xi = \frac{1}{2uvU} - \frac{1}{2u^2 U},$$
$$\eta = -\frac{1}{2uvV} + \frac{1}{2v^2 V}.$$

On en déduit immédiatement

$$\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta = \frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi = 0.$$

Donc *la développée moyenne d'une cyclide a même image sphérique qu'elle.*

CHAPITRE VII.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE GAUSS CONCERNANT LE PRODUIT DES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX.

64. *Exemple de propriété des faisceaux, persistant quelle que soit la forme de la surface de référence.* — Nous avons étudié dans les Chapitres précédents une série de propriétés se rapportant toutes à

la transformation sphérique. Il convient à présent de mettre en évidence les propriétés du faisceau des droites parallèles aux normales de la surface de référence qui persistent, quelle que soit la forme de celle-ci.

Déjà nous avons trouvé l'une des propriétés en question au nº 58. L'équation de condition qui exprime que les *images principales* du faisceau (X) sont conjuguées sur (O) étant

$$\frac{d}{dv}(f\xi) = \frac{d}{du}(g\eta),$$

on voit qu'elle ne contient ni P, ni Q, ni D; donc on peut déformer (O) comme on voudra : *si chacun des plans tangents entraîne dans la déformation la droite* (X) *qui le traverse, le faisceau* (X) *aura toujours ses images principales conjuguées sur* (O).

Nous avons fait voir que dans ce cas l'intégrale du problème est toujours connue, puisque les droites (X) sont les cordes de contact d'une famille de sphères.

65. *Dans un faisceau de droites parallèles aux normales de la surface de référence, le produit des distances focales ne dépend pas de la forme de cette surface.* — L'équation (11) conduit à une proposition très importante dans l'ordre d'idées où nous nous plaçons. Z_1 et Z_2 désignant les distances des foyers du faisceau (X) au plan tangent en (O), on a

$$\begin{aligned} 0 = -Z_1Z_2(PQ - fgD^2) &+ \left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) \\ &- \left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right), \end{aligned}$$

ou, en tenant compte des équations (9),

$$\begin{aligned} -Z_1Z_2&\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du}\right)\right] \\ &= \left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) \\ &\quad - \left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right). \end{aligned}$$

expression qui ne contient que f et g; ainsi : *Quelle que soit la forme de* (O), *le produit des distances focales du faisceau* (N) *est constant.* (En désignant, pour abréger, par distance focale la distance d'un foyer au plan tangent.)

Ce théorème est une généralisation du célèbre théorème de Gauss sur l'invariabilité du produit des rayons de courbure principaux, lorsqu'on déforme la surface; il suffit en effet d'annuler ξ et η dans l'équation précédente pour avoir la valeur du produit des rayons de courbure principaux de (O), puisque le faisceau (N) coïncide avec celui des normales à (O).

66. *Application du théorème précédent. La somme algébrique des aires correspondantes des deux nappes d'une enveloppe de sphères reste constante quelle que soit la forme de la surface lieu des centres.* — Arrêtons-nous un moment à déduire des conséquences géométriques de la proposition que nous venons d'établir.

Supposons que les droites (N) soient les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur (O); alors, si R désigne le rayon de la sphère ayant son centre au point (u, v), posant

$$R^2 = -2Z,$$

on peut écrire

$$\xi = \frac{dZ}{f\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{g\,dv}, \qquad \zeta^2 = -2Z - \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 - \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2;$$

mais, pour simplifier les formules, prenons pour (u), (v) un réseau isométrique, et enfin passons aux coordonnées symétriques imaginaires; en adoptant les mêmes notations qu'au n° **44**, il vient

$$\lambda + \frac{d\xi}{du} + \frac{d\lambda}{\lambda\,dv}\eta = \lambda\left(1 + 2c - \frac{da}{dx} - \frac{db}{dy}\right),$$

$$\lambda + \frac{d\eta}{dv} + \frac{d\lambda}{\lambda\,du}\xi = \lambda\left(1 + 2c + \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy}\right),$$

$$\frac{d\xi}{dv} - \frac{d\lambda}{\lambda\,du}\eta = \frac{d\eta}{du} - \frac{d\lambda}{\lambda\,dv}\xi = i\lambda\left(\frac{da}{dx} - \frac{db}{dy}\right).$$

De là résulte, pour le produit $Z_1 Z_2$, la valeur remarquable

$$-\frac{4Z_1Z_2}{\lambda^2}\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy} = (1+2c)^2 - 4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}.$$

Considérons maintenant les deux nappes (M) et (M′) de l'enveloppe de sphères, soit ζ l'ordonnée commune aux deux points M et M′, et i l'angle de OM ou de OM′ avec la normale à (O); si $d(\mathrm{M})$ et $d(\mathrm{M}')$ sont les éléments des aires des surfaces enveloppes correspondant à un élément $d(\mathrm{O})$ de la surface de référence, on a, d'après un théorème de Gauss,

$$\cos i\, d(\mathrm{M}) = \frac{d(\mathrm{O})}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}(Z_1+\zeta)(Z_2+\zeta),$$

$$\cos i\, d(\mathrm{M}') = \frac{d(\mathrm{O})}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}(Z_1-\zeta)(Z_2-\zeta),$$

de telle sorte que

$$\cos i\,\frac{d(\mathrm{M})+d(\mathrm{M}')}{2} = \frac{d(\mathrm{O})}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}(Z_1Z_2+\zeta^2),$$

d'où résulte, après substitution,

$$-\cos i\,\frac{d(\mathrm{M})+d(\mathrm{M}')}{2}$$
$$= i\left(\frac{dx^2-dy^2}{4}\right)\left\{4\zeta^2\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy} - \lambda^2\left[(1+2c)^2 - 4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\right]\right\}.$$

On voit que $\cos^2 i$ est égal au quotient de ζ^2 par $-2Z$; par conséquent, si l'on déforme la surface des centres, $d(\mathrm{M})+d(\mathrm{M}')$ ne varie pas; d'où résulte cette proposition :

Que l'on trace deux contours conjugués fermés, sur les deux nappes (M) *et* (M′) *d'une enveloppe de sphères dont les centres sont rangés sur une surface* (O) *et compris à l'intérieur d'un certain contour fermé; on peut déformer la portion de surface* (O) *comprise à l'intérieur du contour sans que la somme des aires des contours* (M) *et* (M′) *varie,* pourvu que chaque point de (O) entraîne avec lui la sphère dont il est le centre.

67. *Théorème sur la somme des volumes des deux nappes d'une enveloppe de sphères.* — On peut également déduire de ce qui précède un théorème sur le volume des enveloppes de sphères. Nous appellerons volume de la nappe (M) correspondant à un certain contour fermé tracé sur cette surface le solide limité à la portion de (M) comprise dans le contour et à la portion correspondante de la surface des centres (O), ainsi qu'à la surface gauche lieu des normales à (M) tout le long du contour; soit dV ce volume.

Considérons la famille des surfaces parallèles à (M) : elle décomposera le volume en question suivant une série de prismes infinitésimaux dont la mesure est facile.

Soit R' la distance de O à l'une des surfaces parallèles à (M), posons

$$R' = R - K,$$

où K est la distance de cette surface à (M); si l'on écrit

$$A = \frac{dR}{\lambda^2 dx}, \qquad B = \frac{dR}{\lambda^2 dy}, \qquad C = \frac{d^2 R}{\lambda^2 dx\, dy},$$

il vient

$$-\zeta'^2 = -\zeta^2 - K^2(1 - 4\lambda^2 AB) + 2K[R + 2\lambda^2(Ab + Ba)],$$

$$a' = a + KA, \qquad b' = b + KB,$$

$$\frac{da'}{dx} = \frac{da}{dx} + K\frac{dA}{dx}, \qquad \frac{db'}{dy} = \frac{db}{dy} + K\frac{dB}{dy},$$

$$c' = c + KC.$$

Mais si l'on décrit des sphères ayant leurs centres sur (O) et dont le rayon soit égal à R', elles envelopperont manifestement deux surfaces parallèles à (M) et (M'); soient $d(M_1)$ et $d(M'_1)$ les éléments de ces surfaces correspondant aux éléments $d(M)$ et $d(M')$, on obtient immédiatement

$$-\cos i \frac{d(M_1) + d(M'_1)}{2}$$

$$= i\frac{dx^2 - dy^2}{4}\bigg(4\frac{d^2 \log\lambda}{dx\, dy}\{\zeta^2 + K^2(1 - 4\lambda^2 AB) - 2K[R + 2\lambda^2(Ab + Ba)]\}$$

$$- \lambda^2(1 + 2c + 2KC)^2 + 4\lambda^2\left(\frac{da}{dx} + K\frac{dA}{dx}\right)\left(\frac{db}{dy} + K\frac{dB}{dy}\right)\bigg),$$

ou, en ordonnant suivant les puissances de K,

$$-\cos i\,\frac{d(M_1)+d(M'_1)}{2}$$

$$=i\frac{dx^2-dy^2}{4}\Bigg(K^2\left[4\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}(1-4\lambda^2 AB)-4\lambda^2C^2+4\lambda^2\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dy}\right]$$

$$+2K\Bigg\{-4\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}[R+2\lambda^2(Ab+Ba)]$$

$$-2\lambda^2(1+2c)\,C+2\lambda^2\left(\frac{dA}{dx}\frac{db}{dy}+\frac{dB}{dy}\frac{da}{dx}\right)\Bigg\}$$

$$-4\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}(2Z+4\lambda^2ab)-\lambda^2\left[(1+2c)^2-4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\right]\Bigg).$$

L'élément du solide limité à deux surfaces infiniment voisines parallèles à (M) et compris entre deux contours correspondants a pour mesure

$$d(M_1)\,dK,$$

de telle sorte que les deux volumes dont nous cherchons la mesure ont pour expression

$$dV=\int_{K=R}^{K=0}d(M_1)\,dK,\qquad dV'=\int_{K=R}^{K=0}d(M'_1)\,dK,$$

et la somme de ces volumes s'obtiendra en intégrant par rapport à K l'expression écrite plus haut. Dans ces conditions l'on obtient

$$\int_{K=R}^{K=0}dK[d(M_1)+d(M'_1)]$$

$$=-i\frac{(dx^2-dy^2)}{2\cos i}\Bigg(\frac{R^3}{3}\left[4\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}(1-4\lambda^2AB)-4\lambda^2C^2+4\lambda^2\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dy}\right]$$

$$+R^2\Bigg\{-4\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}[R+2\lambda^2(Ab+Ba)]$$

$$-2\lambda^2(1+2c)C+2\lambda^2\left(\frac{dA}{dx}\frac{db}{dy}+\frac{dB}{dy}\frac{da}{dx}\right)\Bigg\}$$

$$-4\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}R(2Z+4\lambda^2ab)-R\lambda^2\left[(1+2c)^2-4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\right]\Bigg).$$

On voit que cette expression ne dépend pas des éléments de forme relatifs à la surface des centres. Ainsi :

La somme des volumes correspondant aux deux nappes d'une enveloppe de sphères reste invariable quelle que soit la déformation que l'on fasse subir à la surface lieu des centres.

68. *Relations entre les rayons de courbure des deux nappes d'une enveloppe de sphères.* — Les résultats que nous venons d'établir conduisent à des relations entre les rayons de courbure principaux des deux nappes d'une enveloppe de sphères.

Soient ρ_1, ρ_2 les distances du point O aux centres de courbure principaux de (M); de même soient ρ'_1, ρ'_2 les distances de O aux centres de courbure de (M'); soient enfin $d(\mu)$ et $d(\mu')$ les valeurs sphériques des éléments $d(\mathrm{M})$ et $d(\mathrm{M}')$; on a

$$d(\mathrm{M}) = d(\mu)\,(\rho_1 + \mathrm{R})(\rho_2 + \mathrm{R}),$$
$$d(\mathrm{M}') = d(\mu')(\rho'_1 + \mathrm{R})(\rho'_2 + \mathrm{R});$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} d(\mathrm{M}) + d(\mathrm{M}') = {} & \mathrm{R}^2[d(\mu) + d(\mu')] \\ & + \mathrm{R}[d(\mu)(\rho_1 + \rho_2) + d(\mu')(\rho'_1 + \rho'_2)] \\ & + d(\mu)\rho_1\rho_2 + d(\mu')\rho'_1\rho'_2. \end{aligned}$$

Mais nous venons de démontrer que, si l'on remplace R par R — K, l'expression précédente est indépendante de la forme de (O), quel que soit K ; il en résulte

$$d(\mu)\rho_1\rho_2 + d(\mu')\rho'_1\rho'_2 = \text{const.},$$
$$d(\mu)(\rho_1 + \rho_2) + d(\mu')(\rho'_1 + \rho'_2) = \text{const.},$$
$$d(\mu) + d(\mu') = \text{const.}$$

La première de ces équations est évidente, la troisième exprime cette propriété remarquable :

La somme des deux valeurs sphériques de deux contours tracés sur les deux nappes d'une enveloppe de sphères et conjugués est

constante quelle que soit la déformation que l'on fasse subir à la portion de la surface des centres comprise dans le contour correspondant aux deux premiers.

Des trois propositions que nous venons d'établir, celle-ci est celle qui se rapproche le plus du théorème de Gauss : lorsqu'on déforme une portion de surface limitée à un contour fermé, la valeur sphérique de ce contour reste constante.

La seconde des trois dernières équations conduit facilement à établir que

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho'_2} = \text{const.},$$

quelle que soit la déformation de (O).

69. *Extension des théorèmes au cas où (O) se réduit à une courbe gauche ou plane.* — Nous ne pouvons passer sous silence les particularisations des théorèmes qui précèdent, auxquelles on est conduit en remplaçant la surface des centres par une courbe gauche puis par une courbe plane.

Si (O) est remplacé par une courbe gauche, il faut supposer une sphère unique ayant son centre en chaque point de (O) ; chaque sphère touche alors son enveloppe suivant un cercle. Que l'on déforme une portion de la courbe (O), chaque point de celle-ci entraînant la sphère dont elle est le centre, *la portion de surface enveloppe comprise entre les cercles de contact des sphères extrêmes reste constante. Le volume compris entre les plans de ces cercles et le boyau qui est l'enveloppe des sphères reste aussi constant.*

Nous ne pourrions sans quitter notre sujet établir directement ces propositions, non plus que celles qui ont rapport aux enveloppes de cercles dans le plan ; ces dernières constituent une généralisation intéressante d'un théorème très particulier établi par Steiner à propos des podaires des courbes. C'est même en cherchant cette généralisation que nous avons été conduit à soupçonner l'existence des propositions qui font l'objet de ce Chapitre.

70. *Remarque au sujet d'un travail de Bour qui n'a pas été publié.* — Il n'est peut-être pas sans intérêt de faire observer que Bour

(*Théorie de la déformation des surfaces*, p. 148) parle « d'un appendice à son Mémoire consacré à la théorie des surfaces caustiques » (appendice qu'on n'a pas retrouvé); il annonçait que « cette théorie présente des rapports fort curieux avec celle de la déformation des surfaces ». Nous ne pensons pas que Bour ait songé aux aires des surfaces enveloppes de sphères ni à leurs volumes, mais il avait certainement trouvé des relations liant entre elles et à la surface *dirimante* les quatre nappes des surfaces *caustiques conjuguées*, c'est-à-dire les développées des surfaces enveloppes de sphères dans le cas où les rayons incidents sont normaux à une surface. Cette phrase nous a paru poser un problème intéressant à résoudre, tant au point de vue de la théorie des surfaces proprement dite, qu'à celui de la reconstitution d'un travail perdu : telle est l'origine de toutes les recherches que nous exposons partiellement aujourd'hui. Dans le Chapitre IX, nous résumerons rapidement les propriétés des surfaces *caustiques* qui persistent avec la déformation de la surface *dirimante :* c'est manifestement ce que visait Bour.

71. *Pourquoi la distance des points d'une surface* (O) *à un plan fixe satisfait à une équation indépendante de la forme de* (O). — On a considéré comme un fait digne de remarque que la distance des points d'une surface (O) à un plan fixe satisfit à une équation qui ne contient que les dérivées de cette fonction et les éléments indéformables de (O). C'est en partant de cette équation aux différentielles partielles du second ordre qu'on a essayé la recherche de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, mais on n'a pas indiqué quelle était la raison géométrique du fait analytique important que nous venons de signaler. Ce fait se met en relief d'une facon tout à fait nette si, au lieu de la distance à un plan, on fait intervenir la distance à un point fixe. Supposons en effet qu'en chacun des points d'une surface (O) on fixe avec liaison une tige égale à la distance au point fixe M; si les extrémités de ces tiges ne sont pas réunies, la surface est libre, on peut la déformer comme on l'entend; réunit-on au contraire toutes les tiges, elle est comme une *carène* maintenue par ses *acores*, et ne peut être déformée, car la mise en place de la surface s'opère consécutivement en construisant une suite de tétraèdres ayant pour bases des éléments

triangulaires accolés de (O) et pour sommet commun le point M. Ainsi : *étant donné un système de tiges fixées en chacun des sommets d'un polyèdre à faces triangulaires infiniment petites, il n'y a qu'une forme du polyèdre (et la forme symétrique) permettant de réunir les extrémités des tiges en un même point.* Mais cette construction est-elle toujours possible sans déchirure du polyèdre, quel que soit le système des tiges adopté? Il est bien facile de voir que non. Soient en effet O l'un des sommets du polyèdre et 1, 2, 3, ..., n les sommets des triangles ayant O comme sommet commun, on construira sans difficulté les tétraèdres (O, 1, 2, M), (O, 2, 3, M), ..., (O, $n-1$, n, M) qui s'accoleront les uns aux autres; or, ceci fait, on n'aura plus qu'à joindre le sommet n au point 1 pour constituer le polyèdre autour de O, mais rien n'implique que la distance (n, 1) sera précisément celle qu'on s'était donnée *a priori*. Autrement, si l'on construit le tétraèdre ayant pour base (nOM) et dont on connaît les trois arêtes (1n), (1O), (1M), rien n'implique que le sommet 1 ainsi obtenu coïncidera avec le sommet 1 qui a servi de point de départ; il y aura donc, en général, déchirure suivant (O1). Si l'on passe à la limite, on voit facilement par ce qui précède que *la distance de chacun des points d'une surface* (O) *à un point* (M) *n'est pas une fonction quelconque des éléments indéformables de* (M), *qu'à toute valeur de cette fonction correspond une seule forme de la surface, si l'on néglige la forme symétrique.*

72. *Signification géométrique de l'équation qui lie la distance des points d'une surface* (O) *à un point fixe, aux éléments indéformables de* (O). Veut-on savoir quelle est l'interprétation géométrique de l'équation de condition dont nous venons d'établir l'existence? Elle résulte immédiatement du théorème démontré au n° **65**; on écrira que le produit des *distances focales* relatives à l'enveloppe de sphères de centre M est égal au carré de la distance du point M au plan tangent de (O), toutes les sphères passant par O.

Supposons maintenant que, au lieu de prendre pour données de la question les distances des points de (O) à M, nous choisissions les distances de (O) à une sphère de centre M; il est clair que ce que nous avons dit au n° **71** subsiste intégralement. Il suffit de supposer que le

rayon de la sphère croît indéfiniment (certains de ses points restant à distance finie) pour voir que *la distance de chacun des points d'une surface* (O) *à un plan* (P) *n'est pas une fonction quelconque des éléments indéformables de* (M), *qu'à toute valeur de cette fonction correspond une seule forme de la surface.*

73. *Remarque.* — Il est remarquable que si la surface (M) est un point, l'aire (M) est nulle; que si la surface est un plan, sa valeur sphérique est nulle : de telle sorte qu'on est induit à penser que la surface pour laquelle le volume (défini comme il a été dit plus haut) compris entre (O) et (M) est nul, présenterait un certain intérêt. Nous ne pouvons nous arrêter à tous ces détails.

74. *Exemple dans lequel, en particularisant la surface de référence* (O), *on obtient un faisceau de droites parallèles à des normales et normales à une surface, quelle que soit la valeur de* (O). — Nous avons établi dans ce Chapitre des propriétés qui persistent quelle que soit la déformation de la surface de référence, en laissant à celle-ci toute sa généralité; il serait facile d'arriver à de nouvelles propositions en particularisant (O). Ainsi, demandons-nous dans quel cas le faisceau de droites (N) parallèles aux normales de (O) peut rester celui des normales à une surface quelle que soit la forme de (O). Reportons-nous aux formules du n° **30**; on peut toujours supposer que η est nul, ce qui ne fait que particulariser le réseau $(u)(v)$; la condition devient

$$\mathrm{P}\frac{d\xi}{dv}+g\mathrm{D}\frac{d\xi}{du}+\mathrm{Q}\frac{df}{g\,dv}\xi-f\mathrm{D}\frac{dg}{f\,du}\xi=0.$$

Or elle ne peut être vérifiée, quelle que soit la forme de (O), que l'on a

$$\frac{d\xi}{dv}=\frac{df}{g\,dv}=0,\qquad g\frac{d\xi}{du}-\frac{dg}{du}\xi=0,$$

système dont l'intégrale est

$$\xi=g=\mathrm{U},\qquad f=1.$$

Le dS^2 de la surface (O) peut s'écrire

$$dS^2 = du^2 + U^2 dv^2 :$$

donc *la surface de référence est, dans ce cas, applicable sur une surface de révolution; le* ξ *de la droite* N *est égal au rayon du parallèle de la surface, passant en* O.

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE DES FAISCEAUX DE DROITES SITUÉES DANS LE PLAN TANGENT DE LA SURFACE DE RÉFÉRENCE.

75. *Équation donnant la variation du plan tangent à une surface élémentaire.* — Il nous est nécessaire d'établir à présent un certain nombre de formules relatives aux faisceaux de droites situées individuellement dans les plans tangents de la surface de référence; mais nous passerons rapidement sur cette étude, afin de ne pas faire double emploi avec celle beaucoup plus générale et très intéressante des faisceaux de courbes tracées dans les plans tangents de la surface de référence, dont nous nous occuperons plus loin.

Considérons un réseau orthogonal $(u)(v)$ tracé sur la surface de référence, et soit, par rapport aux axes OX, OY,

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi - p = 0$$

l'équation de la droite T faisant partie du faisceau (T) dont nous voulons nous occuper.

Si l'on suit un chemin défini par les accroissements du et dv sur (O), les droites telles que T forment une surface élémentaire; il s'agit tout d'abord de trouver la loi de variation du plan tangent le long de T. Désignons par θ l'angle du plan tangent en un point $M(\xi, \eta)$ de T avec le plan XOY. On peut considérer le point M marqué sur T comme se déplaçant avec elle suivant une certaine loi qu'il est inutile de particu-

lariser; les coordonnées du point M′ après le déplacement (du, dv) sont par rapport aux anciens axes

$$\xi + \Delta X, \quad \eta + \Delta Y, \quad \Delta Z;$$

dès lors, la distance de la projection de M′ sur le plan tangent à T est

$$\Delta X \cos\varphi + \Delta Y \sin\varphi,$$

et l'on voit immédiatement que l'angle θ du plan tangent en M est défini par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\Delta Z}{\Delta X \cos\varphi + \Delta Y \sin\varphi}.$$

On a d'ailleurs, pour lier les coordonnées de M, l'équation

$$\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi - p = 0;$$

mais d'après les formules (F) et si l'on pose

$$\begin{aligned} \xi &= p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi, \\ \eta &= p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \Delta Z = {} & du\,[-\mathrm{P}(p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi) + f\mathrm{D}(p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi)] \\ & + dv\,[-\mathrm{Q}(p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi) + g\mathrm{D}(p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X \cos\varphi + \Delta Y \sin\varphi = {} & \left[\ f\,du + (p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi)\left(du\,\frac{df}{g\,dv} - dv\,\frac{dg}{f\,du}\right)\right]\cos\varphi \\ & + \left[+ g\,dv + (p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi)\left(dv\,\frac{dg}{f\,du} - du\,\frac{df}{g\,dv}\right)\right]\sin\varphi \\ & + \Delta\xi\cos\varphi + \Delta\eta\sin\varphi; \end{aligned}$$

mais l'on a

$$\Delta\xi\cos\varphi + \Delta\eta\sin\varphi = \Delta p + (\xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi)\,\Delta\varphi = \Delta p + \mathrm{L}\,\Delta\varphi;$$

d'où résulte l'équation cherchée

$$\tang\theta = \frac{\left\{\begin{array}{l} du[p(-\mathrm{P}\cos\varphi + f\mathrm{D}\sin\varphi) - \mathrm{L}(\mathrm{P}\sin\varphi + f\mathrm{D}\cos\varphi)] \\ + dv[p(-\mathrm{Q}\sin\varphi + g\mathrm{D}\cos\varphi) + \mathrm{L}(\mathrm{Q}\cos\varphi + g\mathrm{D}\sin\varphi)] \end{array}\right\}}{du\left[f\cos\varphi + \frac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)\right] + dv\left[g\sin\varphi + \frac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)\right]},$$

Nous allons en déduire comme dans les études précédentes toutes les propriétés du faisceau des droites (T).

76. *Condition pour que les droites joignant* O *aux foyers du faisceau soient conjuguées sur* (O); *elle est indépendante de la forme de* (O). — On remarquera que L représente une longueur comptée sur T à partir du pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite. Aux foyers de T, les plans tangents aux surfaces élémentaires sont invariables; on y a donc

$$\begin{aligned}\tang\theta &= \frac{p(-\mathrm{P}\cos\varphi + f\mathrm{D}\sin\varphi) - \mathrm{L}(\mathrm{P}\sin\varphi + f\mathrm{D}\cos\varphi)}{f\cos\varphi + \frac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)} \\ &= \frac{p(-\mathrm{Q}\sin\varphi + g\mathrm{D}\cos\varphi) + \mathrm{L}(\mathrm{Q}\cos\varphi + g\mathrm{D}\sin\varphi)}{g\sin\varphi + \frac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit à volonté soit l'équation des foyers, soit celle des plans tangents principaux; mais il convient tout d'abord de transformer les équations précédentes; on peut les écrire

$$\begin{aligned}\tang\theta &= \frac{-\mathrm{P}(p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi) + f\mathrm{D}(p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi)}{f\cos\varphi + \frac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)} \\ &= \frac{-\mathrm{Q}(p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi) + g\mathrm{D}(p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi)}{g\sin\varphi + \frac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)}\end{aligned}$$

ou, en multipliant haut et bas par des coefficients convenables et ajoutant,

$$\begin{aligned}\frac{-\tang\theta}{\mathrm{PQ} - fg\mathrm{D}^2} &= \frac{p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi}{g\mathrm{D}\left[f\cos\varphi + \frac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)\right] + \mathrm{P}\left[g\sin\varphi + \frac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)\right]} \\ &= \frac{p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi}{\mathrm{Q}\left[f\cos\varphi + \frac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)\right] + f\mathrm{D}\left[g\sin\varphi + \frac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)\right]}.\end{aligned}$$

Posons

$$A = \sin\varphi\left(\frac{g\sin\varphi}{p} + \frac{dp}{p\,dv}\right) - \cos\varphi\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right),$$

$$B = \cos\varphi\left(\frac{f\cos\varphi}{p} + \frac{dp}{p\,du}\right) - \sin\varphi\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right),$$

$$C = \sin\varphi\left(\frac{f\cos\varphi}{p} + \frac{dp}{p\,du}\right) + \cos\varphi\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right),$$

$$E = \cos\varphi\left(\frac{g\sin\varphi}{p} + \frac{dp}{p\,dv}\right) + \sin\varphi\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)$$

et cherchons l'équation quadratique des droites passant par les deux foyers et par O; nous trouvons

$$\begin{aligned} &Y^2(f\mathrm{DA} + \mathrm{QC}) \\ &\quad + XY(f\mathrm{DE} - \mathrm{PA} - g\mathrm{DC} + \mathrm{QB}) - X^2(\mathrm{PE} + g\mathrm{DB}) = 0. \end{aligned}$$

Que faut-il pour que ces droites soient conjuguées de l'indicatrice en (O)? D'après l'équation (2) on trouve facilement

$$g\mathrm{C} = f\mathrm{E},$$

d'où résulte l'équation fort importante

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g\sin\varphi}{p}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{f\cos\varphi}{p}\right).$$

On remarquera que les paramètres tenant à la forme de (O) ont disparu; d'où résulte que : *si les segments focaux d'un faisceau de droites* T *situées dans les plans tangents de la surface de référence sont vus des points de contact sous un angle dont les côtés sont conjugués, on peut déformer* (O) *comme on l'entend, chaque plan tangent entraînant la droite correspondante, et cette propriété subsistera.*

77. *Intégrale de l'équation de condition précédente; interprétation géométrique.* — Mais l'équation de condition est équivalente au système

$$\frac{g\sin\varphi}{p} = \frac{dZ}{dv}, \qquad \frac{f\cos\varphi}{p} = \frac{dZ}{du},$$

d'où résulte que l'on peut construire immédiatement tous les faisceaux de droites telles que T satisfaisant à la condition géométrique indiquée.

On peut même donner de ces faisceaux une définition géométrique tout à fait nette. Choisissons le réseau (u, v) de telle sorte que φ soit toujours nul, il vient

$$\frac{f}{p} = \frac{dZ}{du}, \qquad \frac{dZ}{dv} = 0;$$

d'où résulte que *la droite peut être considérée comme la polaire de la corde de contact d'une enveloppe de sphères ayant leurs centres sur* (O).

Autrement dit, que l'on considère deux enveloppes de sphères conjuguées (M) et (M'), si l'on mène les plans tangents à ces enveloppes aux points correspondants M et M', ils se couperont suivant une série de droites T situées individuellement dans chacun des plans tangents de (O); les droites joignant O aux foyers de T sont conjuguées sur (O).

Telle est l'intégrale du problème, elle témoigne une fois de plus du rôle que jouent les enveloppes de sphères en Géométrie.

Nous aurons par la suite à revenir sur ces faisceaux intéressants.

78. *Équation des plans tangents principaux. Fonction invariante quelle que soit la forme de* (O). *Cas où les droites sont normales à des surfaces.* — Formons maintenant l'équation qui donne les plans tangents principaux; on trouve

$$\begin{aligned}
-\operatorname{tang}^2\theta\Big[&\left(f\cos\varphi + \frac{dp}{du}\right)\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right) \\
&+\left(g\sin\varphi + \frac{dp}{dv}\right)\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)\Big] \\
+\operatorname{tang}\theta\Big[&-p(P\cos\varphi - fD\sin\varphi)\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right) \\
&+\left(f\cos\varphi + \frac{dp}{du}\right)(Q\cos\varphi + gD\sin\varphi) \\
&+(P\sin\varphi + Df\cos\varphi)\left(g\sin\varphi + \frac{dp}{dv}\right) \\
&-p(Q\sin\varphi - gD\cos\varphi)\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)\Big] \\
&+p(PQ - fgD^2) = 0.
\end{aligned}$$

On voit que *le produit des tangentes que font les plans principaux avec le plan tangent à* (O) *est constant quelle que soit la forme de* (O); *en particulier, si un faisceau* (T) *est composé des normales à une surface, il jouit de cette propriété quelle que soit la forme de* (O). Dans ce cas, l'équation de condition est

$$p(\mathrm{PQ} - fg\mathrm{D}^2) = \left(f\cos\varphi + \frac{dp}{du}\right)\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right) + \left(g\sin\varphi + \frac{dp}{dv}\right)\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right).$$

79. *Liaison entre les droites joignant les foyers du faisceau à* (O) *et les images principales.* — D'après les errements suivis précédemment, nous sommes naturellement amené à rechercher les images principales sur (O) du faisceau (T); soit OO_1 un élément de (O) qu'il faut suivre pour que les droites T se rencontrent consécutivement; soit F_1 le foyer de T correspondant. Le plan XOY contenant T est (d'après un lemme souvent employé) tangent à la surface élémentaire au point où sa caractéristique rencontre T, pour tout déplacement de T; mais, dans l'espèce, la surface élémentaire étant développable, le plan XOY ne peut être tangent qu'au point de l'arête de rebroussement, c'est-à-dire au foyer F_1 : donc si l'on suit l'une des images principales, la direction conjuguée de celle-ci contient le foyer correspondant de T. Par conséquent, on obtiendra l'équation quadratique des images principales en formant celles des droites conjuguées aux droites issues du point O et contenant les foyers F_1 et F_2.

Il importe d'établir cette formule en prenant l'équation de la droite T sous la forme

$$\mathrm{AX} + \mathrm{BY} = 1, \qquad \mathrm{Z} = 0,$$

où A et B sont les quantités $\frac{\cos\varphi}{p}$ et $\frac{\sin\varphi}{p}$.

Si l'on suit le chemin $du\,dv$, les équations de la droite dans la se-

conde position sont

$$\left(A + \frac{dA}{du}du + \frac{dA}{dv}dv\right)\left[-f\,du + X + Y\left(\frac{-df}{g\,dv}du + \frac{dg}{f\,du}dv\right) + Z(-P\,du + g\,D\,dv)\right]$$
$$+\left(B + \frac{dB}{du}du + \frac{dB}{dv}dv\right)\left[-g\,dv + X\left(\frac{-dg}{f\,du}dv + \frac{df}{g\,dv}du\right) + Y + Z(-Q\,dv + f\,D\,du)\right] = 1,$$
$$X(P\,du - g\,D\,dv) + Y(Q\,dv - f\,D\,du) + Z = 0.$$

Écrivant que X, Y, Z ont les mêmes valeurs dans les équations qui précèdent, il vient

$$\begin{aligned} du^2\Big[P\Big(\frac{dB}{du} - A\frac{df}{g\,dv} - ABf\Big) + fD\Big(\frac{dA}{du} + B\frac{df}{g\,dv} - A^2 f\Big)\Big] \\ + du\,dv\Big[\quad P\Big(\frac{dB}{dv} + A\frac{dg}{f\,du} - B^2 g\Big) + fD\Big(\frac{dA}{dv} - B\frac{dg}{f\,du} - AB\,g\Big) \\ - Q\Big(\frac{dA}{du} + B\frac{df}{g\,dv} - A^2 f\Big) - gD\Big(\frac{dB}{du} - A\frac{df}{g\,dv} - ABf\Big)\Big] \\ + dv^2\Big[-Q\Big(\frac{dA}{dv} - B\frac{dg}{f\,du} - AB\,g\Big) - gD\Big(\frac{dB}{dv} + A\frac{dg}{f\,du} - B^2 g\Big)\Big] = 0. \end{aligned}$$

On vérifie sur cette équation que les images principales sont conjuguées lorsque

$$\frac{d}{dv}(Af) = \frac{d}{du}(Bg).$$

Si pour une forme de (O) les images principales de (T) sont conjuguées, elles restent conjuguées quelle que soit la forme de (O); de plus, leurs tangentes en (O) coïncident avec les droites qui joignent O aux foyers de T : l'intégrale du problème correspond donc aux polaires des enveloppes de sphères.

80. *Cas où les segments focaux sont vus suivant des directions conjuguées des points de contact de deux plans passant par les droites du faisceau, l'une des surfaces étant l'une des nappes*

d'une enveloppe de sphères ayant leurs centres sur l'autre. Première équation du problème. — Lorsque T est la polaire d'une enveloppe de sphères (M) et (M′), le segment focal est vu du point O sous des directions conjuguées; les droites MF_1, MF_2 jouissent-elles de la même propriété par rapport à (M)?

Renversons le problème et, nous donnant des droites T situées dans les plans tangents de (O), exprimons qu'elles appartiennent aux plans tangents d'une surface (S) telle que le point S soit à chaque instant sur la normale en O à (O). Il est clair que l'on peut considérer (O) comme l'une des nappes d'une enveloppe de sphères dont les centres sont sur (S); dès lors, les droites SF_1, SF_2 sont conjuguées sur (S), et le problème est ramené à la recherche des conditions dans lesquelles OF_1 et OF_2 sont conjuguées sur (O).

Prenons l'équation du plan tangent en S sous la forme

$$AX + BY + CZ = 1.$$

Supposons de plus que (O) est rapportée à ses lignes de courbure. C est l'inverse du segment OS.

On obtiendra les équations des coordonnées du point de contact en cherchant l'intersection du plan tangent avec tous les plans tangents infiniment voisins; les formules (Φ) donnent

$$X\left(B\frac{df}{g\,dv} + PC + \frac{dA}{du}\right) + Y\left(-A\frac{df}{g\,dv} + \frac{dB}{du}\right) + Z\left(-AP + \frac{dC}{du}\right) - Af = 0,$$

$$Y\left(A\frac{dg}{f\,du} + QC + \frac{dB}{dv}\right) + X\left(-B\frac{dg}{f\,du} + \frac{dA}{dv}\right) + Z\left(-BQ + \frac{dC}{dv}\right) - Bg = 0;$$

mais, ici, X et Y doivent être nuls et Z doit être remplacé par $\frac{1}{C}$, de telle sorte qu'on doit avoir

$$\frac{dC}{du} = Af\left(C + \frac{P}{f}\right),$$

$$\frac{dC}{dv} = Bg\left(C + \frac{Q}{g}\right);$$

nous voulons que

$$\frac{d}{dv}(Af) = \frac{d}{du}(Bg);$$

ceci conduit à

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\frac{dC}{du}}{C+\frac{P}{f}}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dC}{dv}}{C+\frac{Q}{g}}\right),$$

qui est l'équation différentielle des surfaces telles que (S); il est facile de voir qu'elle n'est autre que l'équation (7) dans laquelle on a remplacé l par $\frac{1}{C}$. Ce résultat était prévu; en effet, puisque les droites SF_1, SF_2 rencontrent respectivement OF_1 et OF_2, en suivant l'image principale du faisceau (T), les normales OS à (O) doivent également se rencontrer consécutivement; par conséquent, OF_1 et OF_2 sont tangentes aux lignes de courbure de (O).

80 *bis. Deuxième équation du même problème.* — Mais, au lieu de chercher à déterminer (S), on peut demander quelle est la définition directe du faisceau (T); il faut alors éliminer C des deux équations où il entre; or on trouve, en différentiant,

$$\frac{d^2C}{du\,dv} = \frac{d}{dv}(Af)\left(C+\frac{P}{f}\right) + ABfgC + ABfQ + Af\frac{d}{dv}\left(\frac{P}{f}\right),$$

$$\frac{d^2C}{du\,dv} = \frac{d}{du}(Bg)\left(C+\frac{Q}{g}\right) + ABfgC + ABgP + Bg\frac{d}{du}\left(\frac{Q}{g}\right).$$

Il vient donc, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, si l'on considère que l'on peut poser

$$Af = \frac{-d\varphi}{\varphi\,du}, \qquad Bg = \frac{-d\varphi}{\varphi\,dv},$$

$$\frac{d^2\varphi}{du\,dv} = \frac{d\varphi}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dg}{g\,du}.$$

Telle est l'équation du problème; on voit que l'on retombe sur cette équation pour ainsi dire *canonique* qui régit toutes les théories dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DES FAISCEAUX DE DROITES ISSUES DES POINTS DE LA SURFACE DE RÉFÉRENCE.

81. *Équation des traces principales.* — Nous arrivons à l'étude des faisceaux de droites rayonnant des différents points de la surface de référence : on peut considérer ces droites comme des rayons lumineux et la surface (O) comme la surface dirimante séparant deux milieux d'inégale transparence ; alors les surfaces focales des faisceaux deviennent des caustiques ; mais nous n'emploierons pas les dénominations employées en Optique.

Les équations d'une droite R issue du point O de (O) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{1}.$$

Les équations de la droite infiniment voisine correspondant au déplacement $du\,dv$ sont, d'après le système Φ,

$$\frac{X - du\left(f + \frac{df}{g\,dv}Y - PZ\right) + dv\left(\frac{dg}{f\,du}Y + gDZ\right)}{a + \frac{da}{du}du + \frac{da}{dv}dv}$$
$$= \frac{Y - dv\left(g + \frac{dg}{f\,du}X - QZ\right) + du\left(\frac{df}{g\,dv}X + fDZ\right)}{b + \frac{db}{du}du + \frac{db}{dv}dv}$$
$$= Z + du(PX - fDY) + dv(QY - gDX) ;$$

exprimons que la seconde droite rencontre la première, nous aurons ainsi l'équation des *traces principales* du faisceau (R) sur (O);

X, Y, Z seront les coordonnées d'un foyer. On peut écrire

$$\frac{-du\left(\frac{da}{du}+\frac{f}{Z}+P+\frac{df}{g\,dv}b\right)+dv\left(-\frac{da}{dv}+\frac{dg}{f\,du}b+gD\right)}{a}$$

$$=\frac{-dv\left(\frac{db}{dv}+\frac{g}{Z}+Q+\frac{dg}{f\,du}a\right)+du\left(-\frac{db}{du}+\frac{df}{g\,dv}a+fD\right)}{b}$$

$$=du(Pa-fDb)+dv(Qb-gDa),$$

où ne figurent plus que les du, dv de la trace principale et le Z du foyer. On trouve pour les *traces principales*

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}&du^2 f\left[\left(-\frac{db}{du}+\frac{df}{g\,dv}a+fD\right)-b(Pa-fDb)\right]\\&\quad-dv^2 g\left[\left(-\frac{da}{dv}+\frac{dg}{f\,du}b+gD\right)-a(Qb-gDa)\right]\\&\quad-du\,dv\left\{f\left[\frac{db}{dv}+Q+\frac{dg}{f\,du}a+b(Qb-gDa)\right]\right.\\&\qquad\qquad\left.-g\left[\frac{da}{du}+P+\frac{df}{g\,dv}b+a(Pa-fDb)\right]\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

82. *Dans quel cas les traces principales sont conjuguées. Transformation des faisceaux en question.* — Cherchons dans quel cas elles formeront un réseau conjugué sur (O). En appliquant la condition (2), il vient

$$P\left(-\frac{da}{dv}+\frac{dg}{f\,du}b\right)-Q\left(-\frac{db}{du}+\frac{df}{g\,dv}a\right)$$
$$+D\left(f\frac{db}{dv}-b\frac{df}{dv}-g\frac{da}{du}+a\frac{dg}{du}\right)=0.$$

On remarquera tout d'abord que si l'on change les signes de a et de b la condition ne change pas; mais en faisant cette transformation on fait intervenir les droites symétriques de R par rapport aux plans tangents de (O); donc : *si les traces principales d'un faisceau incident* R *sont conjuguées, il en est de même pour le faisceau formé par les rayons réfléchis.*

Supposons maintenant qu'on ait choisi pour réseau (u, v) celui des

lignes de courbure, la condition devient, en tenant compte des équations de Codazzi

$$\frac{d}{dv}(aP) = \frac{d}{du}(bQ);$$

on voit que f et g ont disparu; par conséquent, *que l'on mène à chaque instant par les points images de la sphère de rayon unité des parallèles aux droites du faisceau* (R), *si les traces de celui-ci sont conjuguées sur* (O), *les traces principales du faisceau image sont aussi conjuguées sur la sphère.*

Cette propriété nous paraît très digne d'intérêt, car elle vient encore grossir la belle théorie des images sphériques.

L'énoncé précédent peut d'ailleurs être mis sous une forme plus générale en apparence. En effet, tout faisceau rencontrant la sphère et y découpant par ses traces principales un réseau conjugué constitue un être géométrique qui n'a plus rien de commun avec le réseau des lignes de courbure de (O); par conséquent : *si l'on fait correspondre deux surfaces quelconques de façon que leurs plans tangents soient simultanément parallèles, que, de plus, on mène par les points de contact des rayons parallèles entre eux, si l'un des faisceaux a ses traces principales conjuguées, l'autre faisceau jouit aussi de la même propriété.*

La recherche des faisceaux (R) en question revient à celle des faisceaux analogues qui découpent la sphère, par leurs traces principales, suivant un réseau orthogonal.

85. *Intégrale directe du problème à l'aide de surfaces dont les plans tangents sont parallèles à ceux de la surface de référence.* — L'intégrale du problème s'obtient d'ailleurs sans ce détour; on peut poser, en effet,

$$aP = \frac{dZ}{Z\,du}, \qquad bQ = \frac{dZ}{Z\,dv}.$$

Considérons une surface (N), enveloppe des plans distants de Z des plans tangents à (O), les coordonnées du point de contact sont (nº **34**)

$$\zeta = Z, \qquad \xi = \frac{dZ}{P\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{Q\,dv},$$

d'où il résulte

$$P\frac{\xi}{\zeta} = \frac{dZ}{Zdu}, \qquad Q\frac{\eta}{\zeta} = \frac{dZ}{Zdv};$$

par conséquent, *on obtiendra l'intégrale la plus générale du problème en joignant les points de* (O) *à ceux d'une surface quelconque* (N), *la correspondance étant établie par le parallélisme des plans tangents.*

Il n'échappera pas que la réciproque de cette proposition conduit évidemment à une solution (qui était bien connue d'ailleurs), mais il est important de savoir qu'elle est la plus générale et qu'elle fournit tous les faisceaux (R) dont les traces principales découpent (O) suivant un réseau conjugué.

84. *Autre intégrale obtenue en homographiant la précédente.* — Enfin la définition précédente peut elle-même être généralisée. Les plans tangents en N et O étant parallèles se rencontrent sur le plan de l'infini. On peut donner la règle suivante : *Tracez dans un plan* P *une droite quelconque* D, *et par cette droite menez des plans tangents à deux surfaces* (O) *et* (N), *joignez les points de contact par une droite* R *lorsque* D *se déplace dans le plan* P, *les droites* R *forment un faisceau qui a pour images principales, sur* (O) *et* (N), *deux réseaux conjugués.*

Il serait intéressant de chercher toutes les surfaces (N) associées à une surface (O) et telles qu'en joignant les points N et O on obtienne un faisceau de droites dont les traces principales sur (N) et (O) soient conjuguées. Il conviendrait de se donner l'équation du plan tangent à (N) sous la forme

$$AX + BY + CZ = 1;$$

l'une des équations du problème serait

$$\frac{d}{dv}(Af) = \frac{d}{du}(Bg);$$

l'autre équation serait du second ordre par rapport à C. Il conviendrait d'examiner le cas où C disparaît; alors on obtiendrait la génération in-

diquée ci-dessus. Le cas où (N) est infiniment voisin de (O) présente beaucoup d'intérêt. Mais cette étude comporte de trop grands développements pour trouver place ici.

85. *Si les traces d'un faisceau sont conjuguées, celles du faisceau réfléchi le sont aussi. Si les deux traces coïncident, chacun des faisceaux est formé des normales à une surface, le réseau des traces communes est conjugué.* — Nous avons dit que, si les traces principales du faisceau (R) sont conjuguées sur (O), il en est de même pour les traces principales du faisceau formé par les rayons R réfléchis; mais les deux images coïncident-elles? Pour que la coïncidence ait lieu, il faut que l'équation en du, dv ne change pas si l'on change les signes de a et b; on est ainsi conduit à écrire

$$\frac{-f\mathrm{D}(1+b^2)+ab\mathrm{P}}{\dfrac{db}{du}-\dfrac{df}{g\,dv}a}=\frac{-g\mathrm{D}(1+a^2)+ab\mathrm{Q}}{\dfrac{da}{dv}-\dfrac{dg}{f\,du}b}=\frac{f\mathrm{Q}(1+b^2)-g\mathrm{P}(1+a^2)}{f\dfrac{db}{dv}+a\dfrac{dg}{du}-g\dfrac{da}{du}-\dfrac{df}{dv}b},$$

et l'on observera que l'on n'a pas supposé encore que les traces fussent conjuguées. Mais si l'on multiplie par Q les deux termes de la première fraction, par P ceux de la seconde et enfin par D ceux de la troisième et qu'on ajoute, on trouve

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Q}\left(\frac{db}{du}-\frac{df}{g\,dv}a\right)-\mathrm{P}\left(\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f\,du}b\right)\\ &\qquad+\mathrm{D}\left(f\frac{db}{dv}+a\frac{dg}{du}-g\frac{da}{du}-\frac{df}{dv}b\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Si, au contraire, on multiplie les fractions de telle sorte qu'en les ajoutant P, Q et D disparaissent, il vient

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &g(1+a^2)\left(\frac{db}{du}-\frac{df}{g\,dv}a\right)-f(1+b^2)\left(\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f\,du}b\right)\\ &\qquad+ab\left(f\frac{db}{dv}+a\frac{dg}{du}-g\frac{da}{du}-\frac{df}{dv}b\right)=0,\end{aligned}\right.$$

et, comme il n'y a que deux équations distinctes, les deux dernières peuvent être seules considérées. Mais la première exprime que les

traces principales sont conjuguées; quant à la seconde, elle établit que les droites R sont normales à des surfaces, comme nous le démontrerons tout à l'heure. On peut changer les signes de a et de b dans la dernière condition sans l'altérer, de telle sorte qu'on démontre à la fois les propriétés que voici :

Si des rayons sont normaux à une surface et qu'ils se réfléchissent sur une surface donnée, les rayons réfléchis sont encore normaux à des surfaces (théorème de Malus et Dupin).

Si les traces principales de deux faisceaux symétriques par rapport aux plans tangents de la surface de référence coïncident: 1° *ces traces sont conjuguées;* 2° *chacun des faisceaux est composé de droites normales à une surface.* Ce dernier théorème a été établi par Charles Dupin.

86. *Condition pour que le faisceau soit formé des normales à une surface.* — Il faut maintenant trouver directement la condition pour que les droites R soient normales à des surfaces; on l'obtiendra en écrivant que les plans menés par la droite R et les traces principales sont rectangulaires.

Le plan passant par R et par la tangente à O correspondant au déplacement du, dv a pour équation

$$g\,dv(X - aZ) = f\,du(Y - bZ).$$

Si les plans passant par les déplacements du, dv, du', dv' sont rectangulaires, on aura

$$0 = g^2(1 + a^2)\,dv\,dv' + (1 + b^2)f^2\,du\,du' - abfg(du\,dv' + dv\,du'):$$

en exprimant que les deux racines de l'équation (26) satisfont à cette équation, on retrouve (28).

87. *Théorème de Malus et Dupin sur les rayons réfractés. Conique passant par les foyers des faisceaux des rayons incidents et réfléchis : double génération.* — Nous supposerons dans ce qui va suivre que l'on a constamment

$$b = 0, \qquad a = \tang i,$$

c'est-à-dire que le plan des ZX est toujours choisi de façon à contenir le rayon R.

La condition pour que les droites soient normales à des surfaces est

$$\frac{df}{f\,dv}+\frac{\cos i\,di}{\sin i\,dv}=0;$$

on voit que si l'on change $\sin i$ en $K\sin i$, l'équation est encore vérifiée; par conséquent, *si des rayons lumineux normaux à une surface en rencontrent une seconde, ils sont toujours réfractés normalement à une surface.* C'est le complément du théorème de Malus et Ch. Dupin.

Établissons rapidement ce qui a trait à la courbure des deux nappes d'une enveloppe de sphères.

Soit i l'angle que la droite R fait avec l'axe des Z; puisque l'on suppose que cette droite est située dans le plan XOZ, si l'on désigne par θ l'angle que le plan tangent en un point M de R à une surface élémentaire fait avec XOZ, on a, en désignant par ξ et ζ les coordonnées du point M,

$$\tang\theta=\frac{\Delta Y}{\Delta X\cos i-\Delta Z\sin i},$$

d'où résulte, en vertu des équations (F) et en tenant compte de la relation

$$\Delta\xi\cos i-\Delta\zeta\sin i=(\xi\sin i+\zeta\cos i)\Delta i,$$

$$\tang\theta=\frac{-du\left(\dfrac{df}{g\,dv}\xi+f\mathrm{D}\zeta\right)+dv\left(g+\dfrac{dg}{f\,du}\xi+\mathrm{Q}\zeta\right)}{\left\{\begin{array}{l}\cos i[f\,du+\zeta(\mathrm{P}\,du-g\mathrm{D}\,dv)]\\ \quad+\sin i(\mathrm{P}\,du-g\mathrm{D}\,dv)\xi+(\xi\sin i+\zeta\cos i)\left(\dfrac{di}{du}du+\dfrac{di}{dv}dv\right)\end{array}\right\}};$$

aux foyers du faisceau, on a

$$\tang\theta=\frac{-\dfrac{df}{g\,dv}\xi-f\mathrm{D}\zeta}{(f+\mathrm{P}\zeta)\cos i+\mathrm{P}\xi\sin i+(\xi\sin i+\zeta\cos i)\dfrac{di}{du}}$$

$$=\frac{g+\dfrac{dg}{f\,du}\xi+\mathrm{Q}\zeta}{-g\mathrm{D}(\zeta\cos i+\xi\sin i)+\dfrac{di}{dv}(\xi\sin i+\zeta\cos i)},$$

d'où résulte

$$\frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos i} = \frac{-\frac{df}{g\,dv}\xi - f\mathrm{D}\zeta}{f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \xi\frac{di}{du}\cot i} = \frac{g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta}{-g\mathrm{D}\zeta + \xi\frac{di}{dv}\cot i},$$

et l'on s'est arrangé pour que les fractions ne contenant pas $\operatorname{tang}\theta$ ne varient pas si $\operatorname{tang} i$ change de signe; on voit, par cet artifice, que les foyers des rayons incidents et réfléchis sont sur la conique

$$\left(-\frac{df}{g\,dv}\xi - f\mathrm{D}\zeta\right)\left(-g\mathrm{D}\zeta + \frac{di}{dv}\cot i.\xi\right)$$
$$= \left(g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta\right)\left(f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \frac{di}{du}\cot i.\xi\right);$$

si l'on fait $\xi = 0$, il vient

$$\zeta^2(\mathrm{PQ} - fg\mathrm{D}^2) + fg\cos^2 i + (g\mathrm{P} + f\mathrm{Q}\cos^2 i)\zeta = 0,$$

et l'on reconnaît que le produit des segments interceptés sur OZ est égal (au signe près) au produit des rayons de courbure principaux de (O) multiplié par le carré du cosinus de l'angle d'incidence.

Si l'on fait $\zeta = 0$, il vient

$$-\frac{df}{g\,dv}\frac{di}{dv}\cot i.\xi^2 = \left(g + \frac{dg}{f\,du}\xi\right)\left(f\cos^2 i + \frac{di}{dv}\cot i.\xi\right),$$

équation qui ne varie pas si l'on déforme (O), chaque plan tangent entraînant avec lui son couple de rayons.

D'une façon générale, on a

$$(29)\quad \operatorname{tang}\theta\cos i = \frac{-du\left(\frac{df}{g\,dv}\xi + f\mathrm{D}\zeta\right) + dv\left(g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta\right)}{du\left(f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \frac{di}{du}\cot i.\xi\right) + dv\left(-g\mathrm{D}\zeta + \frac{di}{dv}\cot i.\xi\right)}\cos^2 i = m\cos^2 i,$$

mais le premier membre représente la tangente de l'angle que la trace

du plan tangent en M sur XOY fait avec OX; c'est, si l'on veut, le coefficient angulaire de cette trace.

88. *Double génération de la conique précédente.* — Cette remarque conduit à des conséquences qui méritent d'être signalées : donnons à m une certaine valeur et cherchons à déterminer les points de contact des plans tangents correspondants sur les deux surfaces élémentaires formées par les rayons incidents et réfléchis. Il faut, dans l'équation (29), considérer ξ et ζ comme des coordonnées courantes, et l'on voit qu'alors elle représente une droite qui contient les deux points de contact; cette droite varie avec la trace des surfaces élémentaires, mais elle pivote alors autour d'un point déterminé par les équations

$$m = \frac{-\left(\frac{df}{g\,dv}\xi + f\,\mathrm{D}\zeta\right)}{f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \frac{di}{du}\cot i.\xi} = \frac{g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta}{-g\,\mathrm{D}\zeta + \frac{di}{dv}\cot i.\xi}$$

et le lieu de tous ces pivots pour toutes les valeurs de m est précisément la conique trouvée plus haut.

Inversement, si pour une même trace des surfaces élémentaires on cherche l'enveloppe de la droite joignant les points de contact correspondant à une valeur de m, lorsque m prend toutes les valeurs possibles, on trouve qu'elle se réduit au point défini par les équations

$$-du\left(\frac{df}{g\,dv}\xi + f\,\mathrm{D}\zeta\right) + dv\left(g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta\right) = 0,$$

$$du\left(f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \frac{di}{du}\cot i.\xi\right) + dv\left(-g\,\mathrm{D}\zeta + \frac{di}{dv}\cot i.\xi\right) = 0.$$

Le lieu de tous ces pivots, lorsque du et dv varient, est encore la conique trouvée précédemment.

Si dans l'équation (29) on fait $\zeta = 0$, tous les termes dépendant de la courbure de (O) s'éliminent et l'on voit que pour les mêmes valeurs de m et $\frac{dv}{du}$, si l'on déforme (O), la droite des contacts pivote autour du point où elle rencontre le plan tangent en O.

89. *Autre double génération de la conique quand les rayons incidents et réfléchis sont normaux à des surfaces.* — Dans ce qui précède nous n'avons pas supposé que les rayons fussent normaux à des surfaces; faisons maintenant cette hypothèse et considérons les surfaces élémentaires formées par les cordes de contact des sphères tangentes aux deux nappes normales aux rayons réfléchis et incidents. Soient R le rayon d'une sphère enveloppée et δ le $\frac{1}{2}$ d'une corde de contact, on a

$$\delta = -\frac{R\,dR}{f\,du} = R\sin i,$$

$$\frac{d\delta}{du} = -f\sin^2 i + \delta\cot i\frac{di}{du}, \qquad \frac{d\delta}{dv} = \delta\cot i\frac{di}{dv} = -\delta\frac{df}{f\,dv}.$$

L'équation qui donne la variation du plan tangent le long d'une génératrice, pour le déplacement du, dv, est

$$(30)\quad \tang\omega = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{du\left(-\frac{df}{g\,dv}\delta - fD\zeta\right) + dv\left(g + \frac{dg}{f\,du}\delta + Q\zeta\right)}{du\left(f\cos^2 i + \delta\cot i\frac{di}{du} + P\zeta\right) + dv\left(\delta\cot i\frac{di}{dv} - gD\zeta\right)}.$$

Le second membre de cette expression ne diffère pas de celui de $\frac{\tang\theta}{\cos i}$ trouvé plus haut. Mais, si l'on remarque qu'en faisant intervenir toutes les surfaces enveloppes parallèles on aura une série de cordes de contact auxquelles s'appliquera l'équation en $\tang\omega$; δ et ζ désignant les coordonnées courantes, la relation (29) montre que le lieu des points de toutes les cordes de contact où les plans tangents font avec le plan d'incidence l'angle ω est une droite. Pour une valeur de ω, si du et dv varient, la droite pivote autour d'un point. Inversement, si, ω variant, du et dv restent constants, la droite pivote autour d'un second point; les lieux de ces pivots coïncident entre eux et avec la conique trouvée précédemment.

Au point où une corde de contact rencontre l'un des rayons,

$$\frac{\tang\theta}{\cos i} = \tang\omega.$$

D'où l'on déduit que l'intersection des plans tangents aux surfaces des cordes et des rayons est perpendiculaire au rayon.

90. *Les asymptotes de la conique sont parallèles aux normale principales des surfaces focales enveloppes des polaires.* — Si l'on voulait étudier plus complètement cette théorie des caustiques, il conviendrait de former l'équation des surfaces lieux des *polaires* des enveloppes de sphères parallèles. Nous signalerons seulement les deux faits suivants :

Les normales aux surfaces focales des polaires d'une enveloppe conservent la même direction si l'on considère toutes les enveloppes de sphères parallèles; elles sont parallèles aux asymptotes de la conique lieu des foyers des cordes de contact.

91. *Les propriétés des faisceaux parallèles aux normales de* (O) *et des faisceaux issus des points de* (O) *sont corrélatives.* — Si l'on jette un regard d'ensemble sur les diverses propriétés que nous avons rencontrées, on reconnaîtra qu'il s'établit une correspondance bien nette entre les faisceaux de droites (N) parallèles aux normales de la surface de référence et ceux formés par des rayons (R) issus des différents points de cette même surface.

Si (N) a ses images principales conjuguées, R est le faisceau des normales d'une surface, et inversement. Dans le premier cas, l'intégrale est indépendante de la forme de (O); dans le second, elle ne dépend que de son image sphérique.

Quant aux théorèmes sur les segments focaux des faisceaux (N), ils se transforment en des relations qui lient les segments focaux de deux faisceaux symétriques par rapport aux plans tangents de (O).

(*A suivre.*)

Lois des chocs moléculaires;

Par M. CELLERIER.

---

§ 1. — Valeurs théoriques du nombre des chocs et des changements de force vive de translation.

I. — Proposition préliminaire de Géométrie.

Étant donné un élément ω de la surface d'un premier corps m, on déplace par simple translation un second corps m' de façon qu'il reste constamment tangent au premier à l'intérieur de ω; on demande le lieu décrit par le centre de gravité G' de m'; ce lieu δ est évidemment une petite surface. Nous supposons m et m' convexes, n'ayant à leur surface ni angle ni arête vive.

Soit O (*fig.* 1) un point du contour de ω, et prenons pour plan de la

Fig. 1.

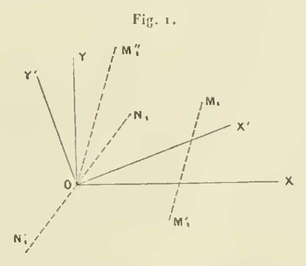


figure le plan tangent en O, m' étant supposé aussi tangent en ce point. Pour simplifier, nous considérerons ce plan comme horizontal, m étant

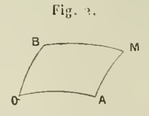
au-dessous, m' au-dessus. Traçons dans ce plan les axes OX, OY suivant les lignes de courbure de m, R étant son rayon de courbure suivant OX et S suivant OY. Soient aussi OX', OY' les directions principales de la surface de m'; OX' peut toujours être supposé dirigé comme dans la figure, à l'intérieur de l'angle XOY, faisant avec OX l'angle aigu I; R' sera le rayon de courbure de m' suivant OX', et S' le rayon suivant OY'.

Supposons aussi décrites deux surfaces sphériques C, C' de rayon 1 tangentes en O au plan de la figure, C au-dessous, C' au-dessus.

Nous dirons qu'un point N de C est le correspondant d'un point M de la surface de m, si en ces points les normales intérieures aux deux surfaces sont parallèles et de même sens. Si M parcourt un petit arc OA sur la première ligne de courbure, les normales sont dans un même plan, en négligeant les infiniment petits du second ordre; celles des points N correspondants seront donc dans un même plan, et le point N décrira un petit arc de grand cercle a, tandis qu'on aura $OA = Ra$, R étant le rayon de l'arc OA. Si M parcourt OB sur la seconde ligne de courbure, N parcourra de même un petit arc de grand cercle b perpendiculaire au premier, et l'on aura $OB = Sb$.

Si M est un point quelconque très près de O et MA, MB les lignes de courbure qui y passent, elles formeront, avec celles qui passent en

Fig. 2.



O, un petit rectangle OAMB (*fig.* 2), et les correspondants des points de son contour formeront sur C un petit rectangle; tous deux se projetteront sensiblement en vraie grandeur sur le plan de la première figure, de sorte que si M_1, N_1 sont les projections de M, N, et que les coordonnées de N_1, pour les axes OX, OY, soient a, b, celles de M_1 seront Ra, Sb et, pour les axes OX', OY', deviendront

$$x = Ra\cos I + Sb\sin I, \qquad y = -Ra\sin I + Sb\cos I.$$

De même, tout point M' de la surface de m' aura pour correspondant

sur C′ le point N′ où les normales aux deux surfaces sont parallèles et de même sens, et si M'_1, N'_1 sont leurs projections sur le plan de la figure, et a', b' les coordonnées de N'_1 par rapport à OX′, OY′, celles de M'_1 seront $x' = R'a'$, $y' = S'b'$.

Enfin nous dirons que M'_1 est le correspondant de M si les normales aux deux surfaces en ces points sont parallèles et de sens contraire; alors il en sera de même pour les normales à C, C′ en N, N′; leur plan contiendra la verticale du point O, et ce point sera le milieu de la droite $N_1 N'_1$. Ainsi a', b' seront en signe contraire les coordonnées de N_1 pour les mêmes axes, lesquelles se déduisent des valeurs ci-dessus de x, y en y remplaçant R et S par 1; les coordonnées $R'a'$, $S'b'$ de M'_1 deviendront ainsi

$$x' = +R'(a\cos I + b\sin I), \qquad y' = -S'(-a\sin I + b\cos I).$$

Dans tout ce qui précède, a, b peuvent évidemment être positifs ou négatifs; nous avons considéré les rayons R, S, R′, S′ comme positifs et intérieurs, les corps étant convexes; mais il est aisé de voir que les formules resteraient exactes s'il s'en trouvait d'extérieurs, en les prenant négatifs. Il faudrait toutefois que le contact fût possible, mais les conditions nécessaires pour cela sont inutiles à examiner.

Revenons maintenant à notre recherche principale et supposons que le corps m' se déplaçant par translation devienne tangent à m en un point M de l'élément ω autre que O. Les normales aux deux surfaces en ce point devant être sur le prolongement l'une de l'autre, et celle de m' n'ayant pas changé de direction, c'est le point M′ correspondant de M, qui est venu se placer sur ce dernier. La distance de M ou M′ au plan de la figure étant infiniment petite du second ordre, la droite MM′ est horizontale; toutes les droites joignant l'ancienne et la nouvelle position d'un même point du corps m' sont égales et parallèles à M′M; il en est de même pour son centre G′; toutes étant horizontales quel que soit M, *le lieu cherché δ est une aire horizontale ou parallèle au plan de l'élément* ω.

Il n'y a pas lieu de chercher sa hauteur qui est celle de G′; mais, pour trouver sa forme et ses dimensions, il revient au même de chercher le lieu des positions successives d'un autre point quelconque de m', pour

lequel nous prendrons O', celui qui d'abord était en contact avec O. Soit M'' sa nouvelle position, qui se confond avec sa projection M''_1 ; OM''_1 est égale et parallèle à $M'_1 M_1$ et de même sens : ainsi, par rapport à OX', OY', les coordonnées x'', y'' de M''_1 seront $x - x'$, $y - y'$ ou, d'après les formules précédentes,

$$x'' = \quad (R + R')a \cos I + (S + R')b \sin I,$$
$$y'' = -(R + S')a \sin I + (S + S')b \cos I.$$

Ainsi δ est le lieu occupé par les points M''_1 quand on prend tour à tour pour M_1 tous les points de l'élément ω. Or, si l'on fait décrire à M_1 tour à tour deux droites parallèles ayant pour équations

$$y = nx + p, \qquad y = nx + q,$$

il résulte des valeurs de x, y que a, b varieront à la fois en étant liés par des équations de la forme

$$b = n'a + p', \qquad b = n'a + q',$$

où n' est le même, et il en résultera entre x'' et y'' des équations de forme analogue

$$y'' = n''x'' + p'', \qquad y'' = n''x'' + q'',$$

de sorte que M_1 décrira aussi deux droites parallèles.

Prenons maintenant pour ω le rectangle déjà considéré, construit sur $OA = Ra$, $OB = Sb$, placés sur OX, OY ; soit A' la position de M''_1 quand M est en A, et B' cette position quand M est en B.

Il résulte de ce qui précède que, M_1 parcourant le contour du rectangle, M''_1 parcourra celui du parallélogramme construit sur OA', OB' ; celui-ci est donc l'aire S. Soient, par rapport à OX' et OY', X et Y les coordonnées de A', et X', Y' celles de B' ; les coordonnées de A par rapport à OX', OY' se déduisent de x, y en y faisant $b = 0$; X, Y se déduiront de même de x'', y'', et, en posant $x = 0$, celles-ci devien-

dront les valeurs de X', Y', d'où

$$X = (R + R')a\cos I, \qquad Y = -(R + S')a\sin I,$$
$$X' = (S + R')b\sin I, \qquad Y' = (S + S')b\cos I.$$

L'aire du parallélogramme est au signe près $\delta = XY' - YX'$, et celle du rectangle ω est $RSab$, d'où résulte

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\delta}{\omega} = \dfrac{K}{RS}, \\ \qquad \text{où} \\ K = (R + R')(S + S')\cos^2 I + (R + S')(S + R')\sin^2 I, \end{array} \right.$$

où les rayons de courbure et, par suite, K sont supposés positifs.

En même temps les points de la sphère C correspondant à tous les points de ω forment un rectangle ω'' dont l'aire est évidemment $\frac{\omega}{RS}$. En outre, les rapports $\frac{\delta}{\omega}$ et $\frac{\omega''}{\omega}$ conservent leurs valeurs $\frac{K}{RS}$, $\frac{1}{RS}$, quelle que soit la forme de l'élément ω, puisqu'on peut toujours le décomposer en rectangles tels que le précédent.

Il est essentiel de remarquer que, parmi les lettres employées dans ce numéro, il n'y a à conserver, avec leur acception, que δ, R, S, R', S', I et K donnés par l'équation (1) ; il ne sera plus question des axes OX, ..., ni des coordonnées qui s'y rapportent, ni des points M_1, ... de la figure ; quant à I, il est indifférent qu'il soit aigu ou obtus ; c'est l'angle de deux lignes de courbure auxquelles correspondent les rayons R et R' dans les deux solides, les autres étant S, S'.

II. — Effets d'un choc.

Le choc a lieu entre deux corps parfaitement élastiques dont les masses m, m' serviront aussi à les désigner, et qui bientôt représenteront des molécules de forme quelconque. Pour le premier, G sera le centre de gravité ; GX, GY, GZ, les axes principaux qui s'y croisent et partagent le mouvement du corps ; A, B, C, les moments d'inertie principaux ; p, q, r les composantes de la vitesse angulaire suivant

ces axes; v la vitesse de translation, ou celle de G. Les axes G′X′, G′Y′, G′Z′ et les lettres G′, A′, B′, C′, p', q', r', v' auront la même signification pour le corps m'. Le choc, comme dans le cas de deux solides, est supposé trop court pour que, pendant sa durée, il y ait un déplacement appréciable des deux corps.

Nous figurerons le plan tangent commun comme horizontal, O étant le point de contact entre le corps m au-dessous, et m' au-dessus ; le sens de rotation de droite à gauche sera considéré comme direct. Le corps m tourne autour de G comme si ce point était fixe, et les équations du mouvement de rotation sont

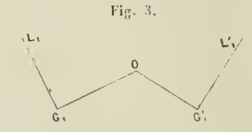
$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=\mu,\qquad \ldots .$$

μ étant, par rapport à GX, le moment de la force, qui se réduit à la pression φ des deux corps, constamment verticale. En intégrant pour la durée du choc, désignant par p_1 l'accroissement fini de p pendant le choc, et remarquant que $\int(C-B)\,qr\,dt$ est négligeable, on aura

$$Ap_1=\mu',\qquad p_1=\frac{\mu'}{A},\qquad \text{où}\qquad \mu'=\int\mu\,dt.$$

En posant $\int\varphi\,dt=i$, μ' est, par rapport à GX, le moment de l'impulsion verticale i, considérée comme une force. L'axe du moment principal est GL, perpendiculaire au plan mené par G et la force. En prenant le plan tangent pour celui de la figure, l'horizontale GL s'y pro-

Fig. 3.



jette en G_1L_1 (*fig.* 3), perpendiculaire à OG_1; son sens dans la figure est tel que la force i agissant de haut en bas tend à faire tourner m dans le sens direct autour de GL; en désignant OG_1 par h et les angles de GL avec les axes par α, β, γ, le moment principal sera ih, et, par rapport à

GX, le moment sera $\mu = ih\cos\alpha$, de sorte que le choc augmente p de $\frac{ih\cos\alpha}{A}$; de même $\frac{ih\cos\beta}{B}$, $\frac{ih\cos\gamma}{C}$ sont les accroissements de q et r.

En désignant par x, y, z les coordonnées du point O, et par X, Y, Z les cosinus de la normale intérieure en ce point, direction de la force i, son moment par rapport à GX, déjà exprimé par $ih\cos\alpha$, le sera aussi par $yZi - zYi$, et, la même similitude ayant lieu pour les autres axes, il en résulte

$$(2)\qquad \begin{cases} h\cos\alpha = yZ - zY, \\ h\cos\beta = zX - xZ, \\ h\cos\gamma = xY - yX. \end{cases}$$

Les accroissements de p', q', r' seront de même $\frac{ih'\cos\alpha'}{A'}$, $\frac{ih'\cos\beta'}{B'}$, $\frac{ih'\cos\gamma'}{C'}$, α', β', γ' étant les angles que forment G'X', G'Y', G'Z' avec G'L' homologue de GL, perpendiculaire au plan vertical mené par OG'; en remarquant que l'impulsion agit sur m' de bas en haut, G'L' a le sens indiqué dans la figure par sa projection $G'_1L'_1$; h' désigne OG'_1.

Voici une conséquence essentielle de la disposition de la figure :

Soient u, u' les projections de v, v' sur la verticale, entendant par là, comme dans ce qui suit, la verticale montante, et, en outre,

$$(3)\qquad \begin{cases} p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma = L, \\ p'\cos\alpha' + q'\cos\beta' + r'\cos\gamma' = L', \\ hL + h'L' = l, \\ u - u' - l = V. \end{cases}$$

Cherchons, avant le choc, la vitesse verticale des points de contact que nous nommerons O pour le corps m et O' pour m'. Pour cela décomposons la vitesse angulaire suivant GL, la verticale de G, et un troisième axe mené par G et se projetant sur OG_1; en vertu de la rotation autour des deux derniers axes, la vitesse de O serait horizontale : sa vitesse verticale, due à la rotation, provient uniquement de la vitesse angulaire autour de GL, laquelle a la valeur précédente et produit,

pour O, la vitesse $L \times OG$; celle-ci, si L est positive, fait, avec la verticale descendante, un angle aigu dont le cosinus est $\frac{OG_1}{OG}$; la vitesse angulaire de O, due à la seule rotation, est donc $-hL$; celle de O′ est de même $+h'L'$; elles doivent être composées avec les vitesses de translation verticales u, u' des centres et deviennent $u-hL$ pour O, et $u'+h'L'$ pour O′; leur différence $u-hL-u'-h'L'$ ou V est donc, avant le choc, la vitesse verticale relative des points qui vont être au contact, tendant à les rapprocher si elle est positive, et, par suite, il n'y a de choc qu'en supposant V positive.

D'après la direction de l'impulsion i, il est clair que le choc change u, u' en $u-\frac{i}{m}$, $u'+\frac{i}{m'}$.

Soient maintenant, pour les deux corps réunis, Δ l'accroissement de la force vive de translation, Δ'' le même pour le seul corps m, et Δ' celui de la force vive de rotation $Ap^2+\ldots$ pour les deux corps, tous trois étant dus au choc. En posant

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= \frac{\cos^2\alpha}{A}+\frac{\cos^2\beta}{B}+\frac{\cos^2\gamma}{C},\\ M' &= \frac{\cos^2\alpha'}{A'}+\frac{\cos^2\beta'}{B'}+\frac{\cos^2\gamma'}{C'},\\ f &= \frac{1}{m}+\frac{1}{m'}+h^2M+h'^2M', \end{aligned}\right.$$

on aura

$$\begin{aligned} \Delta &= m\left(u-\frac{i}{m}\right)^2+m'\left(u'+\frac{i}{m'}\right)^2-mu^2-m'u'^2\\ &= \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)i^2-2i(u-u'),\\ \Delta' &= A\left(p+\frac{ih\cos\alpha}{A}\right)^2-Ap^2+A'\left(p'+\frac{ih'\cos\alpha'}{A'}\right)^2-A'p'^2+\ldots\\ &= 2il+i^2h^2M+i^2h'^2M'. \end{aligned}$$

Par suite de la parfaite élasticité, le travail total de la force φ pendant le choc est nul, et la valeur de i est telle que l'on ait

$$\Delta+\Delta'=0,$$

ou

$$-2Vi + fi^2 = 0, \qquad i = \frac{2V}{f};$$

il en résulte

$$\Delta = \frac{4V^2}{f^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) - \frac{4V}{f}(u - u'),$$

et, en substituant $u - u' = V + l$,

$$(5) \qquad \begin{cases} \Delta = -\Delta' = \dfrac{4V^2}{f^2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'} - f\right) - \dfrac{4V}{f}\,l, \\ \Delta'' = \dfrac{i^2}{m} - 2ui = \dfrac{4V^2}{mf^2} - \dfrac{4Vu}{f}. \end{cases}$$

III. — Exposé général de la question. Nombre des chocs dans un premier cas simple.

Conventions générales. — Les chocs que nous considérons sont ceux des molécules d'un gaz, en admettant qu'elles n'exercent aucune action mutuelle sauf dans le cas du choc; la masse gazeuse est supposée contenue dans une vaste enceinte et rester à l'état permanent, de sorte que la force vive totale reste invariable; par suite, à chaque choc, la force vive des deux molécules réunies, ne pouvant augmenter, ne doit pas non plus diminuer.

Dans ce numéro et les suivants les molécules seront de deux espèces que nous désignerons par (I) et (II); leur nombre total sera n pour la première et n' pour la seconde. Pour celles d'une même espèce, la forme, la masse sont identiques, du reste quelconques. Leur surface est partagée d'une manière identique en éléments, désignés par ω pour l'espèce (I), ω' pour l'autre.

Les lettres m, G, A, B, C, p, q, r, v et les axes GX, GY, GZ du numéro précédent concernent l'espèce (I), et les lettres accentuées l'espèce (II), et de même, dans le cas d'un choc entre espèces différentes, les formules des numéros précédents sont applicables, les corps m et m' représentant les deux espèces. L'accroissement $\Delta + \Delta' = 0$, comme on l'a supposé.

Le nombre de centres d'une molécule (I) existant en moyenne dans

un espace e est proportionnel à n et à e, et pourra être représenté par ne, ce qui revient à prendre l'enceinte pour unité de volume; ce nombre sera de même $n'e$ pour l'espèce (II).

Notre but est de trouver le nombre μ des chocs entre espèces différentes qui surviennent pendant un temps t. Ce temps sera supposé assez petit pour que le maximum ε des angles décrits pendant sa durée par tout point d'une molécule autour de son centre de gravité soit très petit; en outre, il faut pouvoir négliger les cas où, à la fois, deux molécules (II) seraient placées de façon à produire un choc sur une même molécule (I) pendant le temps t, l'un empêchant l'autre; il faudra donc supposer t tel que le nombre des molécules (I) recevant un choc soit très petit par rapport au nombre total n, parce qu'alors le nombre de celles qui pourraient en recevoir deux sera très petit du second ordre.

Cas particulier. — Nous admettrons qu'au commencement du temps t les vitesses de translation de toutes les molécules de même espèce soient égales et parallèles, et les mouvements de rotation identiques, de sorte qu'à un même instant, pour chaque molécule (I), les axes GX, GY, GZ soient parallèles de même sens, et que p, q, r soient égales. La supposition sera la même pour la seconde espèce ou pour p', q', r', G X', ... Cela posé, on demande le nombre μ des chocs pour lesquels le point de contact sera intérieur à un élément déterminé ω des molécules (I), homologue pour toutes.

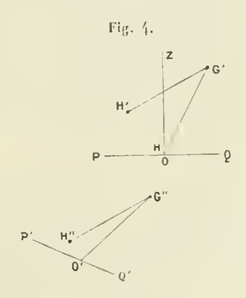
Le nombre μ restera le même si, sans changer les mouvements relatifs intérieurs à l'enceinte, nous attribuons à celle-ci une vitesse de translation égale et opposée à celle des molécules (II), dont les centres deviendront ainsi tous immobiles dans l'espace, l'influence des chocs contre les parois étant négligeable dans ce qui suit, pour une enceinte de grandes dimensions.

Pour qu'une molécule (I) reçoive un choc à l'intérieur de ω au bout d'un temps t', il faut et il suffit qu'il se trouve un centre G' sur une très petite aire δ déterminée au n° 1; nous avions supposé, pour cela, le corps choquant déplacé par simple translation de façon à toucher tour à tour tous les points ω, et, en effet, les diverses positions de G' produisant le choc, correspondant à un même instant, les axes de la molécule (II) sont parallèles. Quant à la distance de δ au plan de ω, à sa po-

sition exacte, aux valeurs de R′, S′, I dans l'équation (1), ce sont des fonctions connues du temps t', comme la position du centre G et la direction des axes des deux corps à tout instant. La grandeur et la position de δ pour le temps t' étant ainsi déterminées, il en sera de même du volume E que décrit cette aire quand t' varie de zéro à t, et, comme les points G′ ne bougent pas, la condition pour qu'une molécule donnée (I) reçoive un choc sur ω est qu'au commencement du temps t il se trouve un point G′ à l'intérieur de E.

Nous négligerons, dans le calcul de E, les termes qui par rapport à E seraient de l'ordre du petit angle ε mentionné ci-dessus, ou les erreurs relatives de cet ordre. Quoique cela revienne à peu près à traiter t comme une différentielle, nous devons regarder les dimensions de ω, qui est un élément d'intégrale, et, par suite, celle de δ, comme infiniment petites en comparaison des espaces décrits par les points des molécules pendant ce temps; de la sorte, E a la forme d'un fil courbe très fin, de section variable; pour le mesurer, considérons comme horizontal et représentons par PQ, dans la *fig.* 4, le plan de ω au bout du

Fig. 4.



temps t, sa normale extérieure OZ étant la verticale montante; puis partageons le volume E en tranches horizontales de hauteur variable Z au-dessus d'un plan horizontal fixe placé plus bas, de façon à n'avoir que des hauteurs positives. La section horizontale étant σ, on aura

$$E = \int_{Z_0}^{Z_1} \sigma \, dZ = \sigma'(Z_1 - Z_0).$$

σ' étant une valeur moyenne de σ et Z_0, Z_1 les hauteurs des positions extrêmes de σ ou de δ.

Le plan de l'aire δ, parallèle à celui de ω, qui à la fin est horizontal, fait partout avec l'horizontale un angle de l'ordre de ε; ainsi, en remplaçant les sections horizontales par d'autres δ qui le sont à peu près, l'erreur relative est de l'ordre ε ou négligeable; le déplacement du point de contact sur la molécule (II) est très petit relativement à ses dimensions, et le changement relatif de R', S' est par suite de l'ordre de ε; il en est de même du changement de I, par suite aussi du changement relatif de K dans l'expression (1), tous ses termes étant positifs. Il est donc indifférent de remplacer σ' par une des valeurs de δ, toutes étant égales.

Soient maintenant

P'Q' le plan de ω au commencement du temps t;
O et O' les positions de ω qu'on peut maintenant réduire à des points;
m la molécule (I);
m', m'', des molécules (II) tangentes à la fin et au commencement en O, O' et ayant G', G'' pour centre;
H le point matériel de m' au contact en O;
H' la position où il était au commencement du temps t, G' n'ayant pas bougé, de sorte que H' n'est plus sur la surface;
G''H'' égale et parallèle à G'H'.

Les hauteurs Z_0, Z_1 sont celles de δ aux deux époques, ou celles de G', G'': mais la différence $Z_1 - Z_0$ restera la même en prenant pour ces hauteurs celles de H', H''; Z_1 correspond à H', car nous verrons qu'alors $Z_1 > Z_0$. Comme, au commencement du temps t, les axes de m et m'' étaient parallèles, et que H' était à la surface de m', H'' est sur celle de m'' dont la position correspond à cette époque. La distance O'H'' de deux points de contact est de l'ordre des déplacements des points des molécules pendant le temps t, ou du même ordre que $Z_1 - Z_0$; mais, en outre, le plan P'Q' étant tangent en O' à une surface sur laquelle est H'', O'H'' fait un petit angle de l'ordre de ε avec le plan P'Q', et par suite avec le plan horizontal. Il en résulte que sa projection sur la verticale est de l'ordre de $O'H'' \times \varepsilon$ ou négligeable par

rapport à $Z_1 - Z_0$; il est donc indifférent de prendre pour Z_0 la hauteur de O′ au lieu de H″.

De la sorte, $Z_1 - Z_0$ est à la première époque la différence de hauteur d'un point O′ de m et d'un point H′ de m', qui tous deux, à la fin du temps t, viennent au contact en O. Ainsi $\frac{Z_1 - Z_0}{t}$ est une valeur moyenne de la vitesse verticale relative de ces deux points. Cette vitesse, à l'instant du contact, est celle qui, au numéro précédent, a été désignée par V. Il est vrai que dans la valeur (3), où entre $u - u'$, on suppose actuellement u' annulée ; mais, en même temps, u est remplacé par une vitesse relative qui est précisément $u - u'$; la valeur de V est donc la même et, le petit changement de vitesse pendant le temps t étant relativement négligeable, on aura

$$Z_1 - Z_0 = Vt;$$

il est d'ailleurs évident que, m' étant au-dessus du plan horizontal PQ, le plus élevé des deux points est H′. Il est préférable dans l'expression $E = \delta(Z_1 - Z_0)$ de prendre pour V comme pour δ leurs valeurs correspondant au commencement du temps t, à l'instant où les mouvements ne sont pas encore modifiés par les chocs : en remplaçant δ par sa valeur (1), on aura

$$E = \frac{K}{RS}\omega V t.$$

A chacune des molécules (I) correspond un volume pareil. Le nombre μ des chocs sera donc celui des points G′ se trouvant, au commencement du temps t, dans un de ces volumes ou dans l'espace total $e = nE$; nous avons vu d'ailleurs, au commencement de ce numéro, que ce nombre est $n'e$, d'où résulte

$$(6) \qquad \mu = \frac{K}{RS}\omega V n n' t.$$

En désignant par μ' l'accroissement de la force vive de translation pendant le temps t pour toute la masse gazeuse, on aura

$$\mu' = \mu\Delta.$$

Δ ayant la valeur (5), puisque les circonstances du choc et par suite Δ sont les mêmes pour toutes les molécules (I). De même

$$\mu'' = \mu\Delta''$$

sera cet accroissement pour la première espèce seule.

Il va sans dire que, quand V est négatif, μ doit être regardé comme nul, tout choc étant impossible sur l'élément ω. Dans tout ce qui précède, nous avons laissé de côté les chocs entre molécules de même espèce; leur nombre est inutile à chercher pour ce qui suivra.

IV. — Nombre μ des chocs entre espèces différentes, dans une seconde hypothèse, accroissements correspondants μ', μ'' des forces vives de translation.

Nous supposons comme précédemment qu'à un même instant, pour une même espèce, les axes des molécules sont parallèles et de même sens, que p, q, r, v sont égales pour toutes, et qu'il en est de même pour p', q', r', v'; mais les vitesses v, v' sont dirigées indifféremment en tous sens. Les chocs seront encore seulement ceux où le point de contact est intérieur à l'élément ω des molécules (I).

Pour une époque donnée, la direction des axes est connue, de même que p, q, r, p', q', r'; l'élément ω étant donné, cela détermine le point de contact des molécules (II), par suite h, h', α, ...; les valeurs (3), (4), de l, f sont communes à tous les chocs, et celles de V diffèrent seules. Nous pouvons donc de nouveau prendre pour plan horizontal celui des éléments ω à l'époque que l'on considère, ou au commencement du petit temps t, la normale extérieure étant la verticale montante.

Chaque espèce pourra être partagée en groupes, en réunissant dans le même les molécules dont la vitesse est sensiblement parallèle, c'est-à-dire telle qu'un rayon parallèle à chacune dans une même sphère fixe de rayon 1 aboutisse à l'intérieur d'un même élément σ ou σ' de sa surface. Les vitesses étant dirigées indifféremment en tous sens, le nombre de molécules d'un groupe est proportionnel à σ, σ' et a pour valeur $n\frac{\sigma}{4\pi}$ ou $n'\frac{\sigma'}{4\pi}$, qu'on devra substituer à n, n' dans la va-

leur (6) de μ. En outre, V, étant variable, devra y être remplacée par V F(V), la fonction F(V) ayant pour valeur 1 si V est positive, et 0 si V est négative. La valeur ainsi trouvée pour μ sera le nombre des chocs entre deux groupes d'espèce différente; le nombre que nous désignerons maintenant par μ est la somme de tous ceux-là, correspondant à toutes les associations de deux éléments σ, σ' de la surface sphérique; de même μ', μ'' sont les sommes des valeurs partielles de μ', ou $\mu\Delta$ et $\mu\Delta'$. En substituant la valeur de Δ et remarquant que toutes les lettres, sauf V, sont indépendantes du groupe, on aura

$$(7)\qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{nn't}{4}\dfrac{\mathrm{K}\omega}{\mathrm{RS}}\mathrm{H}_1, \\ \mu' = \dfrac{nn't\mathrm{K}\omega}{\mathrm{RS}}\left[\dfrac{\mathrm{H}_3}{f^2}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m'}-f\right)-\dfrac{\mathrm{H}_2}{f}l\right], \\ \mu'' = \dfrac{nn't\mathrm{K}\omega}{\mathrm{RS}}\left(\dfrac{\mathrm{H}_3}{mf^2}-\dfrac{\mathrm{H}_4}{f}\right), \end{cases}$$

en posant

$$\mathrm{H}_1 = \sum\sum \frac{\sigma\sigma'}{4\pi^2}\mathrm{V}\mathrm{F}(\mathrm{V}),$$

$$\mathrm{H}_2 = \sum\sum \frac{\sigma\sigma'}{4\pi^2}\mathrm{V}^2\mathrm{F}(\mathrm{V}),$$

$$\mathrm{H}_3 = \sum\sum \frac{\sigma\sigma'}{4\pi^2}\mathrm{V}^3\mathrm{F}(\mathrm{V}),$$

$$\mathrm{H}_4 = \sum\sum \frac{\sigma\sigma'}{4\pi^2}\mathrm{V}^2 u\,\mathrm{F}(\mathrm{V}).$$

Les sommes doivent s'étendre à tous les éléments σ de la surface sphérique fixe et de plus à tous ses éléments σ; on a

$$\mathrm{V} = u - u' - l = v\cos i - v'\cos i' - l,$$

i et i' étant les angles de la direction de v ou v' avec la verticale montante, et par suite, la distance angulaire de σ, σ' au point le plus élevé de la sphère; en prenant ces angles pour coordonnées angulaires et rassemblant les éléments σ, σ' où ils sont les mêmes, on devra substituer $\sigma = 2\pi\sin i\,di$, $\sigma' = 2\pi\sin i'\,di'$.

En posant alors

$$H = \int_0^\pi H'_n \sin i \, di, \qquad H'_n = \int_0^\pi V^{n-1} F(V) \sin i' \, di',$$

il suffira de prendre $n = 2$, 3 ou 4, pour que H devienne H_1, H_2 ou H_3.

On trouvera H'_n en prenant pour variable V au lieu de i'; comme on a

$$V = u - u' - l = v \cos i - v' \cos i' - l,$$

V croîtra de V'' à V', en posant

$$V' = v \cos i + v' - l, \qquad V'' = v \cos i - v' - l:$$

en substituant $\sin i \, di = \frac{dV}{v'}$, on aura

$$H'_n = \frac{1}{v'} \int_{V''}^{V'} V^{n-1} F(V) \, dV.$$

D'après ce que représente F(V), il est clair, soit que V' et V'' soient toutes deux positives, ou que V' seule le soit, ou que toutes deux soient négatives, qu'on aura toujours

$$H'_n = \frac{1}{v' n} [V'^n F(V') - V''^n F(V'')].$$

Posons ensuite

$$(8) \qquad \begin{cases} V_1 = \quad v + v' - l, \\ V_2 = \quad v - v' - l, \\ V_3 = - v + v' - l, \\ V_4 = - v - v' - l. \end{cases}$$

En substituant dans H le premier terme de H_n seul et prenant pour variable V' au lieu de i, on aura

$$\sin i \, di = - \frac{dV'}{v};$$

et, en renversant les limites, V' croîtra de V_3 à V_1; on trouvera ainsi de la même manière, pour le premier terme de H,

$$\frac{1}{vv' n(n+1)}[V_1^{n+1}F(V_1) - V_3^{n+1}F(V_3)].$$

Le second terme de H s'en déduit évidemment en remplaçant V_1 et V_3 par V_2 et V_4.

Il en résulte

$$(9)\quad \begin{cases} H_1 = \frac{1}{6vv'}[V_1^3F(V_1) - V_2^3F(V_2) - V_3^3F(V_3) + V_4^3F(V_4)], \\ H_2 = \frac{1}{12vv'}[V_1^4F(V_1) - V_2^4F(V_2) - V_3^4F(V_3) + V_4^4F(V_4)], \\ H_3 = \frac{1}{20vv'}[V_1^5F(V_2) - V_2^5F(V_2) - V_3^5F(V_3) + V_4^5F(V_4)]. \end{cases}$$

La valeur de H_4, d'après ce que représente H'_n, peut s'écrire

$$H_4 = \int_0^\pi u H'_3 \sin i \, di = \frac{1}{3v'}\int_0^\pi [uV'^3F(V') - uV''^3F(V'')] \sin i \, di.$$

D'après les valeurs de V', V'', on peut remplacer u ou $v \cos i$ par $V' + l - v'$ dans le premier terme, et par $V'' + l + v'$ dans le second, d'où

$$\begin{aligned} H_4 = {} & \frac{1}{3v'}\int_0^\pi [V'^4F(V') - V''^4F(V'')] \sin i \, di \\ & + \frac{l}{3v'}\int_0^\pi [V'^3F(V') - V''^3F(V'')] \sin i \, di \\ & - \frac{1}{3}\int_0^\pi [V'^3F(V') - V''^3F(V'') \sin i \, di. \end{aligned}$$

Ces trois intégrales s'obtiendront comme ci-dessus, et les deux premières seront $\frac{4}{3}H_3$ et lH_2. On aura donc

$$(9\,bis)\quad \begin{cases} H_4 = \frac{4}{3}H_3 + lH_2 - H'_2, \\ \text{où} \\ H'_2 = \frac{1}{12v}[V_1^4F(V_1) - V_3^4F(V_3) + V_2^4F(V_2) - V_4^4F(V_4)]. \end{cases}$$

Ces valeurs étant substituées dans les formules (7), elles ne contiendront plus rien d'inconnu, et seront encore sous forme finie.

V. — Recherche de μ, μ', μ'' dans une troisième hypothèse.

Le mode de variation de p, q, r et l'orientation des axes des molécules dans l'espace sont deux faits indépendants. Si, par exemple, elles sont des solides de révolution, l'axe de figure décrit dans l'espace un cône autour d'une droite dont la direction est indifférente et le mouvement conique de l'axe peut être à un instant quelconque de sa période. A plus forte raison, dans le cas d'une forme générale des molécules, nous devons, pour une même espèce, regarder comme indifférente la direction des axes pour chacune.

C'est ce que nous allons maintenant supposer et μ sera le nombre de chocs entre espèces différentes, non sur un élément ω, mais quel que soit le point de tangence sur les deux molécules. Toutefois, nous admettrons encore que c et c' aient une seule valeur et qu'au commencement du temps t, p, q, r soient égaux pour l'espèce (I), et p', q', r' pour l'espèce (II). Le résultat ne peut encore se trouver que par des hypothèses successives.

1° *Admettons que pour les molécules* (I) *seulement les axes restent parallèles et qu'il s'agisse seulement des chocs de l'élément* ω. — Soient μ_2, μ'_2 le nombre des chocs et l'accroissement de la vitesse de translation pour ce cas, et μ_1, μ'_1 les valeurs (7). Il sera préférable de considérer encore au commencement du temps t la normale extérieure aux éléments ω comme la verticale montante. Cela détermine dans les formules (7) la signification de h, α, β, μ; quant à h', α', β', μ', elles se rapportaient à une molécule (II) produisant un choc à l'instant que l'on considère; elles dépendent de l'élément ω' qui vient au contact avec ω, et celui-là était connu par la direction de sa normale, celle des axes étant donnée. Mais, dans le cas actuel, nous devons partager l'espèce (II) en groupes.

Pour cela, imaginons dans chaque molécule (II) une surface sphérique de centre G', de rayon 1, partagée en éléments σ d'une façon qui, pour toutes, soit identique par rapport à leurs axes. Nous grouperons

d'abord ensemble les molécules pour lesquelles la verticale du point G' dirigée vers le bas aboutit à l'intérieur du même élément σ, et comme elle peut aboutir indifféremment à tout point de la surface sphérique, le nombre de molécules d'un de ces groupes provisoires est $n' \frac{\sigma}{4\pi}$; puis nous ferons tourner encore une molécule autour de cette verticale d'un angle variable ψ, par différences égales $d\psi$, et nous aurons ainsi achevé de classer les directions des axes, ou les groupes, de sorte que le nombre de molécules d'un même groupe sera $n' \frac{\sigma}{4\pi} \frac{d\psi}{2\pi}$, et que pour celles-là tous les axes sont parallèles; nous pourrons alors employer pour ce seul groupe les formules (7), ce qui revient à remplacer n' par la valeur précédente, puis nous devrons ajouter μ et μ' pour tous les groupes, ce qui donne

$$\mu_2 = \sum \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1 \frac{d\psi}{2\pi}, \qquad \mu'_2 = \sum \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mu'_1 \frac{d\psi}{2\pi}.$$

Voici comment on simplifie ces expressions : il est préférable de considérer ω comme un point unique O où le plan tangent est horizontal. Cela posé, soit ω' l'élément de la surface de la molécule (II) ou de m' composé de points correspondants de ceux de σ; comme on a défini ce mot au § I, c'est-à-dire tels que les normales extérieures à m et à la sphère soient parallèles et de même sens. Nous avons vu que le rapport des deux aires était RS pour le corps m et par suite R'S' pour m', de sorte que $\omega' = \text{R}'\text{S}'\sigma$. Or, pour chaque groupe ou chaque terme des sommes μ_2, μ'_2, on doit évaluer $h', \alpha', \beta', \gamma'$ en plaçant m tangent en O, de sorte que la normale intérieure soit verticale montante; d'autre part, pour les termes de la somme Σ correspondant à σ, la verticale de G' aboutit en un point de σ. Les positions où il en est ainsi sont donc celles où le point de contact en O est intérieur à ω : on peut donc substituer $\sigma = \frac{\omega'}{\text{R}'\text{S}'}$, et étendre la somme Σ aux divers éléments ω', en faisant correspondre $h', \alpha', \beta', \gamma'$ à chacun d'eux.

Si, ensuite, on fait tourner la molécule d'un angle ψ en la plaçant toujours tangente, c'est autour de la verticale du point O qu'elle tournera; les valeurs de f, l, H_i, R', S' restent alors les mêmes, et la seule

quantité qui varie dans les formules (7) est l'angle I qui entre dans la valeur (7) de K; celui-là peut servir de mesure à ψ, de sorte qu'on a $\psi = \mathrm{I} + \text{const.}$, $d\psi = d\mathrm{I}$; l'expression $\int_0^{2\pi} \mathrm{K}\,\frac{d\psi}{2\pi}$ pourra être encore désignée par K et s'en déduit en remplaçant $\cos^2\mathrm{I}$ et $\sin^2\mathrm{I}$ par $\frac{1}{2}$; de la sorte nous devons maintenant supposer

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{K} &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{R}+\mathrm{R}')(\mathrm{S}+\mathrm{S}') + \tfrac{1}{2}(\mathrm{R}+\mathrm{S}')(\mathrm{S}+\mathrm{R}') \\ &= \mathrm{RS} + \mathrm{R}'\mathrm{S}' + \tfrac{1}{2}(\mathrm{R}+\mathrm{S})(\mathrm{R}'+\mathrm{S}'). \end{aligned}\right.$$

Après ces changements on aura

$$\mu_2 = \sum \mu_1 \frac{\omega'}{4\pi \mathrm{R}'\mathrm{S}'}, \qquad \mu'_2 = \sum \mu'_1 \frac{\omega'}{4\pi \mathrm{R}'\mathrm{S}'}.$$

2° *Valeurs de* μ, μ' et μ''. — Les expressions précédentes ne dépendent point de la position horizontale attribuée à ω, et si, en admettant toujours que les axes des molécules (I) sont parallèles, nous voulons étendre les chocs à tous les éléments ω, il n'y a qu'à ajouter les valeurs de μ_2, μ'_2 qui leur correspondent.

Si, ensuite, en supposant ces axes non parallèles, nous partageons l'espèce (I) en groupes, le résultat précédent reste le même pour chacun, ce qui rend ce classement inutile.

En substituant les valeurs (7) de μ_1 μ'_1, et remplaçant f par sa valeur dans l'expression $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} - f\right)$, on aura ainsi, ce qui précède étant applicable à μ'',

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{nn't}{16\pi} \sum\sum \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{RSR}'\mathrm{S}'} \mathrm{H}_1 \omega\omega', \\ \mu'' &= \frac{nn't}{4\pi} \sum\sum \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{RSR}'\mathrm{S}'} \left(\frac{\mathrm{H}_3}{mf^2} - \frac{\mathrm{H}_4}{f}\right) \omega\omega', \\ \mu' &= \frac{nn't}{4\pi} \sum\sum \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{RSR}'\mathrm{S}'} \left[-\frac{\mathrm{H}_2}{f} l - \frac{\mathrm{H}_3}{f^2}(h^2\mathrm{M} + h'^2\mathrm{M}')\right] \omega\omega', \end{aligned}\right.$$

les sommes s'étendant aux éléments ω, ω' des deux espèces.

On peut remarquer, quoique nous n'ayons pas à en faire l'applica-

tion, qu'on a toujours

$$\Sigma\Sigma l \omega\omega' = 0.$$

En effet, dans les formules (2), x, y, z sont les coordonnées de ω, et X, Y, Z les cosinus de la normale intérieure. On peut grouper les éléments de façon qu'ils aient deux à deux la même projection sur le plan des xy; ωZ la représente pour tous les deux en signe contraire; d'ailleurs, y étant le même, il en résulte $\Sigma y Z\omega = 0$; le raisonnement étant tout pareil pour zY, zX, ..., les équations (2) donnent

$$\Sigma\omega h \cos\alpha = 0, \qquad \Sigma\omega h \cos\beta = 0, \qquad \Sigma\omega h \cos\gamma = 0,$$

et l'on tirera des formules (3)

$$\Sigma h \mathrm{L}\omega = 0, \qquad \Sigma h' \mathrm{L}'\omega' = 0, \qquad \Sigma\Sigma l \omega\omega' = 0.$$

VI. — Recherche de μ, μ' dans une quatrième hypothèse. Cas où les molécules sont des solides de révolution. Forme de la solution la plus générale du problème des chocs.

1° *Recherche de* μ, μ'. — Tant qu'une molécule n'éprouve pas de choc et se trouve ainsi soustraite à toute action extérieure, p, q, r varient d'une façon périodique, de sorte que, après la durée T de la période, elles repassent par les mêmes valeurs, bien que l'axe instantané ne revienne point à la même direction dans l'espace.

Dans notre nouvelle hypothèse, les molécules de même espèce auront bien la même loi de rotation, c'est-à-dire le mode de variation de p, q, r sera le même; mais, au lieu de supposer, comme dans la troisième hypothèse, qu'à un même instant p, q, r sont les mêmes pour toutes les molécules, nous admettrons qu'elles peuvent correspondre à divers instants de leur période, et il est clair que ce sera à tous indifféremment. En désignant donc par τ le temps compté à partir de l'instant où p, par exemple, est maxima et faisant croître τ par intervalles égaux $d\tau$, il correspondra à chacune de ces époques un même nombre $n\frac{d\tau}{\mathrm{T}}$ de molécules (I), et les molécules (II) se classeront de

même. Les nouvelles valeurs de μ, μ' se déduiront donc des formules (11) en remplaçant nn' par

$$nn' \frac{d\tau}{T'} \frac{d\tau'}{T'}.$$

et ajoutant les résultats pour toutes les valeurs de τ et τ'. En remarquant que cette intégration porte seulement sur p, q, ..., et, par suite sur l, l', V, on aura

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= \frac{nn't}{16\pi} \sum\sum \frac{K}{RSR'S'} \omega\omega' \int_0^T \frac{d\tau}{T} \int_0^{T'} \frac{d\tau'}{T} H_1, \\ \mu' &= \frac{nn't}{4\pi} \sum\sum \frac{K}{RSR'S'} \omega\omega' \int_0^T \frac{d\tau}{T} \int_0^T \frac{d\tau'}{T} \\ &\quad \times \left[-\frac{H_2}{f} l - \frac{H_3}{f^2} (h^2 M + h'^2 M') \right]. \end{aligned} \right.$$

μ'' aurait une forme analogue.

2° *Supposons que les molécules de chaque espèce soient des solides de révolution.* — En prenant pour GZ, G'Z' les axes de figure, on aura $A = B$, $A' = B'$: la droite à laquelle correspondent α, β, γ est perpendiculaire au plan mené par G et la normale à l'élément ω ; elle est donc perpendiculaire à GZ, et l'on a

$$\cos\gamma = 0;$$

on pourra alors, en regardant α comme un angle polaire, remplacer $\cos\beta$ par $\sin\alpha$, d'où

$$M = \frac{1}{A}.$$

L'axe de figure décrit d'un mouvement uniforme un cône autour d'une droite fixe menée par G ; le plan de ces deux droites renferme l'axe instantané, et son intersection avec celui des xy est la direction de la résultante S de p et de q, laquelle, de même que r, reste constante.

En désignant par ψ l'angle polaire de cette résultante dans le plan

des xy, on aura

$$p = \mathrm{S}\cos\psi, \qquad q = \mathrm{S}\sin\psi, \qquad \mathrm{L} = \mathrm{S}\cos(\psi - \alpha).$$

L'angle ψ varie proportionnellement au temps; il en est de même de $\psi - \alpha$ dans les formules (12), parce que, dans l'intégrale relative à τ, ω et α restent constants. En changeant au besoin le signe de $\psi - \alpha$, on peut supposer cet angle croissant; la période T est révolue quand ψ a augmenté de 2π, et il est indifférent de prendre ψ pour variable au lieu de τ en remplaçant $\frac{d\tau}{\mathrm{T}}$ par $\frac{d\psi}{2\pi}$; le résultat ne changera pas non plus en écrivant ψ au lieu de $\psi - \alpha$. En faisant les mêmes transformations pour les molécules (II), on voit qu'on devra prendre dans les formules (12)

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = \dfrac{1}{\mathrm{A}}, & \mathrm{M}' = \dfrac{1}{\mathrm{A}'}, \\ \mathrm{L} = \mathrm{S}\cos\psi, & \mathrm{L}' = \mathrm{S}'\cos\psi', \\ \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \frac{d\tau}{d\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}'} \frac{d\tau'}{d\mathrm{T}'} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi\, d\psi'}{4\pi^2}, \end{cases}$$

la dernière égalité indiquant une simple substitution de signes.

On peut aussi simplifier la somme relative à ω en partageant la surface par ses lignes de courbure, c'est-à-dire par des méridiens successifs faisant avec l'un d'eux les angles φ, $\varphi + d\varphi$, et par des parallèles rapprochés, comprenant entre eux un arc $d\sigma$ de la courbe méridienne; on aura ainsi

$$\omega = \rho\, d\sigma\, d\varphi,$$

ρ étant le rayon du parallèle. Parmi les lettres entrant dans l'expression qui multiplie ω, d'où ψ a disparu par l'intégration, h, k, R, S sont les seules qui dépendent de la position de ω, mais elles ne dépendent pas de φ; on peut donc intégrer par rapport à φ en remplaçant $d\varphi$ par 2π. En outre, R est le rayon de courbure de la courbe méridienne, et S la normale terminée à l'axe de figure. En désignant par ε leur angle, pour la normale extérieure, variable de 0 à π, sur une même courbe méridienne, on aura

$$d\sigma = \mathrm{R}\, d\varepsilon, \qquad \rho = \mathrm{S}\sin\varepsilon, \qquad \omega = 2\pi\mathrm{RS}\sin\varepsilon\, d\varepsilon,$$

et en désignant par des accents les quantités analogues pour les molécules (II) on pourra encore, dans les formules (12), faire la substitution de signes indiquée par l'égalité

$$(14) \qquad \sum\sum \frac{K}{RSR'S'}\,\omega\omega' = 4\pi^2 \int_0^\pi \int_0^\pi K \sin\varepsilon \sin\varepsilon'\, d\varepsilon\, d\varepsilon'.$$

2° *Question générale à résoudre.* — En laissant de côté le cas des solides de révolution, nous devons supposer l'ensemble des molécules composé d'espèces données quant à la forme, quant à la masse m, m', m'', ..., et quant à leur nombre, qui sera n, n', n'', ... Toute recherche touchant les effets des chocs, en la considérant rigoureusement, exige que, pour chaque espèce, on connaisse la proportion des molécules ayant les diverses vitesses de translation et les divers modes de rotation. C'est nécessaire même pour pouvoir comparer les forces vives totales de translation et de rotation dans l'état permanent.

Pour toute molécule (I) p, q, r varient de façon qu'on ait

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = K^2, \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2G,$$

K et G étant constants pendant le mouvement et G étant compris entre le plus grand et le plus petit des nombres A, B, C. Le mode de rotation est identique pour deux molécules si K et G sont les mêmes. Dans les formules (12), cela a été supposé pour toutes les molécules de même espèce ; p, q, r étaient des fonctions déterminées de K, G et de la variable τ, qui disparaissait dans l'intégration. La forme des molécules étant donnée, les valeurs (12) de $\frac{\mu}{nn't}$, $\frac{\mu'}{nn't}$ sont des fonctions connues de K, G, v et de leurs analogues pour la seconde espèce.

Laissons maintenant de côté toutes les hypothèses particulières faites jusqu'ici, et considérons le cas réel des mouvements de forme variable. La totalité des molécules d'une même espèce pourra se distribuer en groupes en faisant rentrer dans le même celles pour lesquelles, au commencement du temps t, les quantités K, G, v qui caractérisent chaque mouvement sont comprises entre les limites

$$(15) \qquad K \text{ et } K + dK, \quad G \text{ et } G + dG, \quad v \text{ et } v + dv,$$

pour les molécules (I) et d'analogues pour les autres. Pour les molé-

cules (I), le nombre de celles d'un groupe sera

$$n\mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{G}, c)\, d\mathrm{K}\, d\mathrm{G}\, dc.$$

F étant une fonction inconnue; pour les autres espèces n devra être remplacé par n', n'', ..., et F par d'autres fonctions inconnues F', F'', ... Nous ne pouvons plus actuellement, en divisant un groupe composé en d'autres plus simples, connaître les nombres de molécules qui leur correspondent, comme nous l'avons fait précédemment, par une raison d'indifférence; les fonctions F, F', ... doivent donc, avant tout, être déterminées, et voici d'après quelles conditions.

Appelons H, pour abréger, un groupe déterminé de première espèce auquel correspondent les limites (15). Dans l'état permanent de l'ensemble des molécules la répartition des vitesses doit rester la même; ainsi le nombre des molécules du groupe H doit rester constant. Soit, pendant la durée t,

$$\mathrm{N}(\mathrm{K}, \mathrm{G}, c)\, d\mathrm{K}\, d\mathrm{G}\, dc$$

le nombre de chocs effectués entre ce groupe et tous ceux de toutes les espèces, y compris la première : c'est le nombre des molécules qui sortiront du groupe, ou cesseront d'en faire partie, les chocs changeant K, G, c; soit aussi

$$\mathrm{N}'(\mathrm{K}, \mathrm{G}, c)\, d\mathrm{K}\, d\mathrm{G}\, dc,$$

parmi les chocs entre tous les groupes de première espèce d'une part, et d'autre part, tous ceux de toutes les espèces, le nombre de ceux pour lesquels les valeurs de K, G, c, après le choc, sont pour la molécule (I) comprises entre les limites (15); c'est le nombre des molécules (I) qui, par l'effet des chocs, entrent dans le groupe H; il doit être égal au nombre de celles qui en sortent, d'où

$$\mathrm{N}(\mathrm{K}, \mathrm{G}, c) = \mathrm{N}'(\mathrm{K}, \mathrm{G}, c).$$

Pour chaque espèce, il existe une relation semblable, et c'est de là qu'on doit déduire les fonctions F, F', ...

En remplaçant nn' dans la valeur (12) de μ par

$$nn'\,\mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{G}, c)\,\mathrm{F}'(\mathrm{K}', \mathrm{G}', c')\, d\mathrm{K}\, d\mathrm{K}'\, d\mathrm{G}\, d\mathrm{G}'\, dc\, dc',$$

elle devient le nombre de chocs entre le groupe H et un groupe quelconque d'une autre espèce, pour laquelle on peut toutefois prendre la première. En les ajoutant pour tous ces groupes, on trouvera

$$N(K, G, v)\, dK\, dG\, dv.$$

Le calcul analogue pour N' est beaucoup plus compliqué, et il est inutile de le détailler, car, au point de vue général où nous nous plaçons, la solution offre des difficultés insurmontables. Nous verrons plus tard les résultats qui peuvent être obtenus dans certains cas particuliers, à l'aide du principe d'indifférence.

§ 2. — Cas où les molécules sont à peu près sphériques.

VII. — Préliminaires.

Notre but est de déterminer le rapport des forces vives totales de translation et de rotation pour toutes les espèces réunies; cette recherche devient possible quand toutes les molécules sont à peu près sphériques.

1° *Remarques générales sur la répartition des vitesses.* — En suivant la méthode générale indiquée au n° VI, pour des molécules exactement sphériques, toutes de même masse et de même rayon, j'ai démontré précédemment qu'en désignant par $n\varphi(x)\,dx$ le nombre de molécules dont la vitesse est comprise entre x et $x+dx$, on a exactement

$$\varphi(x) = \alpha e^{-\beta x^2} x^2, \tag{16}$$

α et β étant des constantes; en désignant par mu^2 la force vive moyenne des molécules, et remarquant que n est leur nombre total, on doit avoir

$$\Sigma n\, \varphi(v)\, dv = n, \qquad \Sigma nmv^2\, \varphi(v)\, dv = nmu^2,$$

ou

$$\alpha \int_0^{\infty} v^2 e^{-\beta v^2}\, dv = 1, \qquad \alpha \int_0^{\infty} v^4 e^{-\beta v^2}\, dv = u^2.$$

La formule

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta v^2}\, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}},$$

différentiée par rapport à β, donne

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta v^2} v^2\, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^{\frac{3}{2}}}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-\beta v^2} v^4\, dv = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\beta^{\frac{5}{2}}},$$

d'où

(17) $$\alpha = \frac{4\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}, \qquad \beta = \frac{3}{2u^2}.$$

De la sorte α et β sont complètement déterminés au moyen de la force vive totale du milieu.

La valeur de $\varphi(v)$ devient maxima quand $\beta v^2 = 1$ ou $v = u\sqrt{\frac{2}{3}}$; elle décroît rapidement quand v s'écarte de cette valeur.

Sans examiner pour le moment si la formule (16) est applicable quand les molécules sont à peu près sphériques et qu'il y en a plusieurs espèces, il est clair que, dans l'état permanent, le même fait sera toujours vrai, c'est-à-dire que, si l'on partage, comme au n° VI, les nombres n, n' en groupes de nombres

$$n\mathrm{F}(\mathrm{K}, \mathrm{G}, v)\, d\mathrm{K}\, d\mathrm{G}\, dv, \qquad n'\mathrm{F}'(\mathrm{K}', \mathrm{G}', v')\, d\mathrm{K}'\, d\mathrm{G}'\, dv',$$

ils deviendront très peu nombreux si v ou v' s'écartent notablement de leurs valeurs moyennes. Il en sera de même et d'une façon plus prononcée si les forces vives de rotation K^2, K'^2 s'écartent de leurs moyennes. En effet, les vitesses de translation changent notablement à chaque choc, un seul pouvant suffire pour réduire l'une d'elles à zéro. Au contraire, les forces vives de rotation restent invariables si les molécules sont sphériques; si elles le sont à peu près, elles n'éprouvent qu'un faible changement, et il faudrait une combinaison improbable de chocs pour leur faire acquérir des valeurs sensiblement différentes de la moyenne.

2° *Grandeur relative des quantités qui entrent dans les formules* (12). — Les molécules étant à peu près sphériques, les rapports des nombres A, B, C entre eux diffèrent peu de l'unité. Ensuite

$\sqrt{\frac{A}{m}}$ est une ligne dont la valeur, pour une sphère homogène de rayon ρ, est $\rho\sqrt{\frac{2}{5}}$; en même temps, h est la projection de la droite joignant le centre à un point de la surface sur le plan tangent en ce point. Ainsi le rapport de h à $\sqrt{\frac{A}{m}}$ et son carré $\frac{mh^2}{A}$ sont des nombres abstraits très petits; il en sera donc ainsi de $mh^2 M$ et de même de $mh'^2 M'$; de la sorte, dans la valeur (4) de f, la seconde partie $h^2 M + h'^2 M'$ sera très petite par rapport à la première $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}$.

Par suite de la petitesse de h, le rapport $\frac{hL}{c}$ sera aussi très petit quand on donne aux deux forces vives leurs valeurs moyennes. Ce serait même une conséquence de ce qui précède si l'on admettait *a priori* que le nombre que nous cherchons, ou le rapport de la force vive de rotation à l'autre, ne fût pas très grand, car il en serait de même de $\frac{Ap^2}{mc^2}$ et son produit par $\frac{mh^2}{A}$ ou $\frac{h^2p^2}{c^2}$ serait très petit; il en serait alors de même, d'après les formules (3), pour $\frac{hp}{c}$, $\frac{hL}{c}$, et aussi pour $\frac{h'L'}{c'}$ en faisant la même hypothèse pour la seconde espèce. Par conséquent, nous devons considérer $\frac{l}{c+c'}$ comme très petit quand on emploie les valeurs moyennes.

Il n'en sera plus ainsi si l'on donne à la force vive de rotation une valeur beaucoup plus grande que sa moyenne, ou à c, c' une beaucoup plus petite. Mais alors, comme on l'a vu, le coefficient du groupe, c'est-à-dire $F(K, G, c)$ et son analogue sont très petits, et comme nous cherchons à déterminer avec une faible erreur relative les divers termes des formules (11) et (12), après qu'on les aura ajoutées pour tous les groupes, nous devrons dans celles-là regarder constamment l comme très petit numériquement par rapport à $c + c'$.

VIII. — Réduction des expressions H_3, H_2, H'_2.

1° *Valeurs des coefficients* $F(V_n)$. — Dans les formules (9) et (9 *bis*), chacun d'eux désigne l'unité si V_n est positif, et zéro s'il est

négatif. D'après ce qui précède, V_1 ou $v + v' - l$ doit être supposé toujours positif et V_4 négatif; ainsi $F(V_1) = 1$, $F(V_4) = 0$. On devra de même supposer $F(V_2) = 1$ quand $v > v'$. En effet, si l'on avait à la fois $v - v' > 0$ et V_2 ou $v - v' - l < 0$, V_2 serait numériquement inférieur à l, $v - v'$ très petit par rapport à $v + v'$. Ainsi, dans les numérateurs des valeurs (9) et (9 *bis*) de H_2, H_3, H'_2, le premier terme serait très supérieur aux autres; plus tard, nous aurons à tenir compte dans ce terme de la portion en l ou l^2, en négligeant les suivantes. Vis-à-vis de ceux-là le terme en V_2, inférieur à l^4 ou l^5, serait à plus forte raison négligeable. Il en serait de même pour H_1, mais il est inutile de le mentionner, car nous n'aurons plus à faire usage de sa valeur.

On voit de même qu'on devra supposer $F(V_2) = 0$ si $v < v'$, et $F(V_3) = 1$ ou 0 suivant que $v' >$ ou $< v$.

De la sorte H_2, H_3, H'_2 deviendront des fonctions entières de l dont les coefficients sont bien connus dans les deux cas ou $v' >$ ou $< v$.

2° *Les termes contenant l à une puissance impaire doivent être supprimés.* — En effet, les intégrales du mouvement de rotation employées au n° VI, c'est-à-dire

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = K^2, \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2G,$$

donnent

$$A(A - G)p^2 + B(B - G)q^2 + C(C - G)r^2 = 0,$$

équation du cône du second degré que l'axe instantané décrit à l'intérieur du corps; K et G restant les mêmes, ce mouvement peut avoir lieu en deux sens opposés, et l'on sait par la théorie de la rotation que dans les deux cas, pour des positions identiques de l'axe, celui-ci se déplace avec la même vitesse, et la vitesse angulaire est la même en sens contraire.

De la sorte, p, q, r sont les mêmes en signe contraire et varient de la même manière en fonction du temps t en prenant celui-ci en sens inverse. Cela résulte, d'ailleurs, des équations du mouvement

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \qquad \ldots,$$

qui restent les mêmes en remplaçant t, p, q, r par $-t$, $-p$, $-q$, $-r$.

Par conséquent, dans les formules (12), K, G et e restant les mêmes comme K′, G′, e', on doit ajouter les valeurs de μ, μ', μ'' correspondant aux mouvements dans les deux sens, lesquels, pour raison d'indifférence, doivent être considérés comme également fréquents, et, pour ceux-là, la somme $\int_0^T \frac{d\tau}{T}$ affectant des termes de degré impair par rapport à p, q, r réunis à des valeurs égales et de signes contraires. La même remarque s'applique aux variables p', q', r' de la seconde espèce.

Dans les formules (11) et (12), les termes contenant l comme ceux qui contiennent f seront ainsi de degré pair par rapport à h, h' réunis, et nous négligerons le quatrième degré par rapport à ces petits nombres et, par suite, les termes en l^4. D'après les formules (12) et (9 *bis*), H_2 est partout multiplié par l et, par conséquent, doit être réduit à son terme en l, tandis que, dans H_3, H'_2, on doit conserver seulement les termes de degré pair. Dans les valeurs (9) et (9 *bis*), on doit employer le terme en V_2 quand $e > e'$, le terme en V_3 quand $e < e'$; en affectant les signes supérieurs au premier cas, les inférieurs au second, on aura

$$(18)\qquad lH_2 = -\frac{2}{3}gl^2, \qquad H_3 = \frac{g'}{10} + gl^2, \qquad H'_2 = \frac{g''}{6} + g'''l^2,$$

en posant

$$(19)\qquad \begin{cases} g = \dfrac{(e+e')^3 \mp (e-e')^3}{2ee'}, & g' = \dfrac{(e+e')^5 \mp (e-e')^5}{2ee'}, \\[2ex] g'' = \dfrac{(e+e')^4 \pm (e-e')^4}{2e}, & g''' = \dfrac{(e+e')^2 \pm (e-e')^2}{2e}. \end{cases}$$

IX. — Sommation relative au nombre G.

Si toutes les molécules sont des solides de révolution, on a, comme on l'a vu, $\cos\gamma = \cos\gamma' = 0$, et, d'après les formules du n° II, la composante r ou r' de la vitesse angulaire reste constante malgré les chocs; la seule portion variable de la force vive de rotation est $Ap^2 + Aq^2$; c'est entre celle-ci seulement et la force vive de transla-

tion qu'il s'établit dans l'état permanent un rapport invariable, et il sera préférable de la désigner par K^2, tandis que la force vive de rotation tout entière sera $K^2 + Cr^2$ ou $K^2 +$ const. Nous poserons donc dans ce cas

$$A(p^2+q^2) = K^2, \qquad A'(p'^2+q'^2) = K'^2.$$

En même temps, d'après les formules (13), on aura

$$l = hs\cos\psi + h's'\cos\psi'$$

et, dans les formules (12), les intégrations relatives à τ, τ' sont remplacées par le signe

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi\,d\psi'}{4\pi^2},$$

dans lequel ψ, ψ' varient seules, s, s' et toutes les autres lettres restant constantes. Cela seul suffirait évidemment pour faire disparaître toutes les puissances impaires de l, et, quant à l^2, elle sera remplacée par $\frac{1}{2}h^2s^2 + \frac{1}{2}h'^2s'^2$; d'ailleurs, s^2, s'^2 désignant p^2+q^2, $p'^2+q'^2$ ou $\frac{K^2}{A}$, $\frac{K'^2}{A'}$ ou K^2M, K'^2M', d'après les formules (13). Les intégrations étant ainsi effectuées, c'est dans les formules (11) qu'on devra substituer la valeur de l^2 ou

$$(20) \qquad l^2 = \tfrac{1}{2}h^2MK^2 + \tfrac{1}{2}h'^2M'K'^2.$$

Dans le cas général, l^2 ou $(hL + h'L')^2$ doit être réduite à $h^2L^2 + h'^2L'^2$, les termes du premier degré en p, q, r disparaissant. En outre, les équations du mouvement donnent

$$\int pq\,dt = \frac{C}{A-B}r + \text{const.}, \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^T pq\,d\tau = 0,$$

le second membre reprenant la même valeur au bout de la période T; il en serait de même pour pr, qr, $p'q'$, ..., de sorte que l^2 se réduit à

$$\begin{aligned} l^2 = {} & h^2(p^2\cos^2\alpha + q^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\gamma) \\ & + h'^2(p'^2\cos^2\alpha' + q'^2\cos^2\beta' + r'^2\cos^2\gamma'). \end{aligned}$$

Nous ne pouvons point effectuer les intégrations relatives à τ, τ' sous une forme simple ni savoir quelle est la fréquence plus ou moins grande des valeurs de G, G'. Mais il faut remarquer que, dans le cas des surfaces de révolution, où l'on avait $Ap^2 + Aq^2 = K^2$, on a été amené à remplacer Ap^2, Aq^2 par une valeur moyenne $\frac{1}{2}K^2$; or, il est évident que, dans le cas général où $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = K^2$, si l'on veut, dans les formules (11), grouper ensemble les termes où K^2 est le même, ce qui revient à remplacer séparément Ap^2, Bq^2, Cr^2 par une valeur moyenne, on devra prendre pour celle-là $\frac{1}{3}K^2$; en effet, il en serait ainsi en supposant les molécules sphériques et les mouvements de rotation indifférents en tous sens. Si les molécules sont à très peu près sphériques, il en sera de même, sauf une erreur de l'ordre de l'écart de sphéricité ou négligeable dans des termes déjà du deuxième degré par rapport à h et h'. La première partie de l^2 pouvant s'écrire

$$h^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{A}Ap^2 + \frac{\cos^2\beta}{B}Bq^2 + \frac{\cos^2\gamma}{C}Cr^2\right)$$

sera ainsi remplacée par

$$\frac{1}{3}h^2K^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{A} + \frac{\cos^2\beta}{B} + \frac{\cos^2\gamma}{C}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{3}h^2K^2M,$$

et l'autre partie de même par $\frac{1}{3}h'^2K'^2M'$. Après cela, les intégrations relatives à τ, τ' sont superflues, de même que les formules (12), et l'on devra substituer dans les formules (11)

$$(21) \qquad l^2 = \frac{\theta}{3}(h^2MK^2 + h'^2M'K'^2),$$

θ étant égal à l'unité dans le cas général et devant être remplacé par $\frac{3}{2}$ quand les molécules sont des solides de révolution.

En substituant les valeurs (18) de lH_2, H_3, H'_2 dans les équations (11), on devra négliger le quatrième degré et, par suite, dans l'expression de μ', réduire H_3 à $\frac{g'}{10}$. En remarquant que, d'après les formules (9 *bis*), on a

$$\frac{H_3}{m} - fH_4 = \left(\frac{1}{m} - \frac{4f}{3}\right)H_3 - flH_2 + fH'_2,$$

on trouvera

$$(22)\quad \begin{cases} \mu' = \dfrac{nn't}{4\pi}\sum\sum \dfrac{K\omega\omega'}{RSR'S'f^2}\left[\frac{2}{3}fgl^2 - (h^2M + h'^2M')\dfrac{g'}{10}\right], \\ \mu'' = \dfrac{nn't}{4\pi}\sum\sum \dfrac{K\omega\omega'}{RSR'S'f^2}\left[\left(\dfrac{1}{m} - \dfrac{4f}{3}\right)\dfrac{g'}{10}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{fg''}{6} + \left(\dfrac{1}{m} - \dfrac{2f}{3}\right)gl^2 + fg'''l^2\right], \end{cases}$$

où l'on doit substituer la valeur (21) de l^2. Ainsi ces expressions ne dépendent plus que de K^2, K'^2, c, c', et non de G, G'.

X. — Première approximation de la valeur de $\frac{C}{c}$.

En supposant les espèces en nombre quelconque, désignons par η, η', η'', ... la force vive moyenne de rotation correspondant à chacune d'elles et par ζ, ζ', ... la force vive moyenne de translation; par ρ le rapport de la force vive totale de rotation pour tout le système à celle de translation, quand les molécules sont des solides de révolution; par ρ' le même rapport quand cela n'a pas lieu.

En général, dans un gaz tout agent extérieur amenant un changement de force vive influence directement celle de translation, puis, quand l'état permanent s'est rétabli, celle-ci se transforme partiellement en force vive de rotation. Si les molécules sont des solides de révolution, cette transformation n'affecte que la portion de la force vive de rotation qui a été désignée au n° IX par K^2, K'^2; aussi, quand nous parlons de la force vive totale ou moyenne de rotation, il ne doit s'agir que de celle-là.

La transformation s'opère de telle sorte que, $\frac{C}{c}$ étant le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant, $\frac{3}{2}\left(\frac{C}{c} - 1\right)$ exprime le rapport de la force vive totale de translation du milieu à celles de translation et de rotation réunies; ce rapport est le même que $\frac{1}{1+\rho}$ ou $\frac{1}{1+\rho'}$, et en remplaçant $\frac{C}{c}$ dans le second cas par $\frac{C'}{c'}$,

il en résulte

$$(23)\qquad \frac{C}{c} = 1 + \frac{2}{3(1+\rho)}, \qquad \frac{C'}{c'} = 1 + \frac{2}{3(1+\rho')}.$$

Pour avoir une évaluation approximative de ces expressions dans le cas d'une espèce unique, nous supposerons égales toutes les vitesses de translation et, à plus forte raison, les forces vives de rotation qui varient moins. Les formules (19) donnent $g = 4v$, $g' = 16v^3$; on a aussi $K^2 = K'^2 = \eta$; la formule (21) se réduit à $l^2 = \frac{1}{3}\theta\eta(h^2 M + h'^2 M')$, et, dans la valeur (22) de μ',

$$\frac{2}{3} f g l^2 - (h^2 M + h'^2 M')\frac{g'}{10} = (h^2 M + h'^2 M')\left(\frac{8}{9} f v \theta \eta - \frac{8}{5} v^3\right).$$

Cette expression étant du second degré, on doit y remplacer f par la seule partie $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}$ ou $\frac{2}{m}$; elle devient ainsi

$$\frac{16 v\theta}{9m}(h^2 M + h'^2 M')\left(\eta - \frac{9}{10\theta} m v^2\right)$$

et μ' est le produit d'une constante par $\eta - \frac{9}{10\theta} m v^2$ ou $\eta - \frac{9}{10\theta}\zeta$; μ' est ici l'accroissement de force vive de translation pour tout le milieu, puisqu'on n'a plus à le partager en groupes de vitesses variables. Il doit être nul dans l'état permanent, de sorte qu'on a $\frac{\eta}{\zeta} = \frac{9}{10\theta}$; c'est le rapport des forces vives totales, de sorte qu'en posant $\theta = \frac{3}{2}$ ou 1 on aura

$$(24)\quad \rho = \frac{3}{5}, \quad \rho' = \frac{9}{10}, \quad \frac{C}{c} = 1 + \frac{5}{12} = 1{,}417, \quad \frac{C'}{c'} = 1 + \frac{20}{57} = 1{,}351.$$

XI. — Approximation ultérieure.

Il n'est point assez exact de supposer toutes les vitesses égales et, toutefois, en tenant compte de leur répartition, les nombres que nous venons de trouver, comme on le verra, changeront très peu.

D'après ce qui a été dit au n° VII, il y aurait une erreur moindre à considérer les forces vives de rotation comme égales pour une même espèce; toutefois, nous partirons d'un principe plus rationnel et nous admettrons que la fonction $F(K, G, c)$, définie au n° VII, et qui déjà ne contient plus G, soit simplement le produit $F(K)\varphi(c)$ d'une fonction de K seul par une de c seul. Cela revient à admettre, bien que les forces vives de translation et de rotation se transforment l'une dans l'autre, que la répartition de l'une d'elles dans l'état permanent est indépendante de celle de l'autre. Voici les raisons de ce fait :

1° Le changement des vitesses de translation provient de leur direction par rapport au plan du choc; celui de la force vive de rotation dépend surtout soit de la vitesse et du sens de la rotation antérieure, soit des lignes h, h', c'est-à-dire d'éléments n'ayant aucune connexité avec les directions de c et c'; aussi n'y a-t-il pas de raison pour que les écarts de la moyenne de la force vive de rotation correspondent à telle ou telle vitesse de translation.

2° Si l'on suppose connue, pour toutes les espèces, la loi de répartition des vitesses en supposant les molécules sphériques, cette loi, quand elles sont à peu près sphériques, ne pourrait changer que de quantités de l'ordre de l'écart de sphéricité. Ce changement est négligeable, puisqu'en supposant, comme nous l'avons fait au numéro précédent, toutes les vitesses égales, ce qui est bien plus éloigné de la réalité, le rapport ρ ou ρ' n'éprouve qu'un faible changement.

Désignons maintenant, pour la première espèce, par $n\varphi(x)dx$ le nombre de molécules dont la vitesse est comprise entre x et $x + dx$; ce nombre sera de même $n'\varphi(x)\,dx$ pour la seconde espèce. On doit encore partager ces groupes en d'autres correspondant aux diverses valeurs de K et K', après quoi on ajoutera les expressions (22) de μ' et μ'' pour tous les groupes. Mais, d'après ce qu'on vient de voir, les fonctions de K ou K' introduites par le second classement étant indépendantes de c et c', les deux sommations peuvent s'effectuer successivement. Ainsi nous remplacerons d'abord nn' par $nn'\varphi(c)\varphi'(c')\,dc\,dc'$ et nous ajouterons tous les résultats. Cela revient simplement à remplacer, dans les formules (22), g, g', g'', g''' par G, G', G'', G''', en po-

sant

$$(25)\quad \begin{cases} G = \int_0^\infty \int_0^\infty g\varphi(v)\varphi'(v')\,dv\,dv', \\ G' = \int_0^\infty \int_0^\infty g'\varphi(v)\varphi'(v')\,dv\,dv', \\ G'' = \int_0^\infty \int_0^\infty g''\varphi(v)\varphi'(v')\,dv\,dv', \\ G''' = \int_0^\infty \int_0^\infty g'''\varphi(v)\varphi'(v')\,dv\,dv'. \end{cases}$$

Ces lettres G, G′ ne peuvent se confondre avec celles qui ont été employées au n° VI et ont maintenant disparu.

Quant à la sommation relative à K, K′, il faut remarquer que G, G′, ... étant maintenant des constantes, il n'y a à faire aucun partage de n, n' en groupes dans les termes indépendants de K^2, K'^2, mais seulement dans ceux qui ont l^2 en facteur; quant à ceux-là, cette sommation consiste à les ajouter pour toutes les valeurs de K^2, K'^2, forces vives de rotation, et, comme celles-ci n'y entrent qu'au premier degré, cela revient à les remplacer par leurs moyennes η, η', ou simplement à substituer

$$(26)\qquad l^2 = \frac{\theta}{3}(h^2 M\eta + h'^2 M'\eta').$$

On aura ainsi

$$(27)\quad \mu' = \frac{nn't}{4\pi}\sum\sum\frac{K\omega\omega'}{RSR'S'f^2}U, \qquad \mu'' = \frac{nn't}{4\pi}\sum\sum\frac{K\omega\omega'}{RSR'S'f^2}U'$$

U, U′ étant les expressions comprises dans les signes [ ] des formules (22); on doit y substituer

$$f = \frac{m+m'}{mm'} + (h^2 M + h'^2 M'),$$

en négligeant la seconde partie dans les termes déjà multipliés par l^2.

On aura ainsi

$$(28)\quad \begin{cases} U = \dfrac{2(m+m')}{3mm'} G l^2 - \dfrac{G'}{10}(h^2 M + h'^2 M'), \\ U' = \dfrac{G'}{10m} + \dfrac{m+m'}{mm'} P + P(h^2 M + h'^2 M') + Q l^2, \end{cases}$$

en posant

$$(29)\qquad P = \frac{G''}{6} - \frac{2G'}{15}, \qquad Q = \frac{G}{m} + \frac{m+m'}{mm'}\left(G''' - \frac{2}{3} G\right).$$

D'après ce qui a été dit plus haut, la répartition des vitesses indiquée par φ et φ' est celle qui convient à des molécules sphériques, en admettant, cela va sans dire, que, pour chaque espèce, on leur attribue la même masse m, m', ... et le même rayon moyen ou le même volume que pour les molécules non sphériques, et, en outre, que la force vive totale de translation pour le milieu ne soit pas non plus changée.

Soit, dans ce cas, μ''' l'accroissement total de force vive de la première espèce, dû uniquement aux chocs avec la seconde. Ce sera la valeur de μ'' pour le cas particulier où, les molécules étant sphériques, on a $h = h' = 0$, $l = 0$, et, en désignant par U'' ce que devient alors U', la formule (27) donnera

$$(30)\quad \mu''' = U'' \frac{nn't}{4\pi} \sum \sum \frac{K\omega\omega'}{RSR'S'f^2}, \qquad \text{où} \qquad U'' = P\frac{m+m'}{mm'} + \frac{G'}{10m}.$$

Dans le mode de répartition des vitesses qui convient à des molécules sphériques, il est admis qu'un choc entre deux molécules de première espèce ne change pas la somme de leurs forces vives; d'ailleurs, dans l'état permanent, l'accroissement total de la force vive de la première espèce est nul. Il en sera donc ainsi pour celui qui est dû aux chocs avec les autres espèces, quel que soit leur nombre; en supposant qu'elles se réduisent à la seconde, cet accroissement μ''' est donc nul, d'où $U'' = 0$.

En substituant dans U' la valeur de P, tirée de cette équation, on a

$$\frac{m+m'}{m'} U' = \frac{m+m'}{m'} Q l^2 - \frac{G'}{10}(h^2 M + h'^2 M').$$

En substituant la valeur (26) de l^2 dans U', U, et celles-ci dans les expressions (27), elles se partageront en deux parties correspondant aux deux espèces, de sorte qu'on aura

$$(31)\quad \begin{cases} \mu' = \lambda\left(\dfrac{2\theta\eta}{9}\dfrac{m+m'}{mm'}\mathrm{G} - \dfrac{\mathrm{G}'}{10}\right) + \lambda'\left(\dfrac{2\theta\eta'}{9}\dfrac{m+m'}{mm'}\mathrm{G} - \dfrac{\mathrm{G}'}{10}\right), \\ \dfrac{m+m'}{m'}\mu'' = \lambda\left(\dfrac{\theta\eta}{3}\dfrac{m+m'}{m'}\mathrm{Q} - \dfrac{\mathrm{G}'}{10}\right) + \lambda'\left(\dfrac{\theta\eta'}{3}\dfrac{m+m'}{m'}\mathrm{Q} - \dfrac{\mathrm{G}'}{10}\right), \end{cases}$$

en posant

$$(32)\quad \lambda = \frac{nn't}{4\pi}\sum\sum\frac{\mathrm{K}\,\omega\omega'}{\mathrm{RSR'S'}f^2}h^2\mathrm{M}, \qquad \lambda' = \frac{nn't}{4\pi}\sum\sum\frac{\mathrm{K}\,\omega\omega'}{\mathrm{RSR'S'}f^2}h'^2\mathrm{M}',$$

de sorte que λ, λ' sont deux coefficients purement géométriques, dépendant à la fois de la forme des deux espèces.

XII. — Valeurs de G, G', G'', G'''.

Dans le cas d'une espèce unique, on a déjà vu que $\varphi(x)$ a la forme (16); dans le cas où il y a plusieurs espèces, en remplaçant φ par φ'', φ''', ... pour la troisième, quatrième, etc., il serait extrêmement difficile, si ce n'est impossible, de déterminer ces fonctions par la méthode rigoureuse indiquée au n° VI; mais nous serons certains de nous éloigner fort peu de la répartition réelle en leur attribuant des formes analogues

$$(33)\qquad \varphi'(x) = \alpha' x^2 e^{-\beta' x^2}, \qquad \varphi''(x) = \alpha'' x^2 e^{-\beta'' x^2}, \qquad \ldots,$$

α', β', α'', β'', ... étant des constantes. En effet :

1° Il arrivera dans ce cas, comme dans celui d'une seule espèce, qu'un choc unique peut diminuer dans un rapport quelconque et même réduire à zéro l'une des deux vitesses, mais ne peut l'augmenter que dans un rapport limité, et, par conséquent, que les groupes deviendront de moins en moins nombreux quand la vitesse s'écarte d'une valeur moyenne, mais cela d'une manière beaucoup plus prononcée quand elle la dépasse que si elle lui est inférieure. Or c'est ce mode de variation que représente la formule (16), et elle se trouverait ainsi

convenable comme formule empirique lors même qu'on ne pourrait la démontrer rigoureusement.

2° Dans le cas où les masses diffèrent très peu entre elles, la forme supposée serait encore beaucoup plus approximative, étant rigoureusement certaine pour des masses égales.

Le premier de ces cas est évidemment celui du mélange de plusieurs gaz, et le second celui d'un gaz unique, dans lequel on suppose quelques variations accidentelles de forme et de masse des molécules.

De toute manière, l'hypothèse que nous faisons donnera des résultats beaucoup plus exacts que celle d'une valeur unique des vitesses.

Pour évaluer les portions de G, G', ... dans lesquelles $v > v'$, nous aurons besoin de diverses valeurs de l'expression

$$(34) \qquad \mathrm{H}_{i,i'} = \int_0^\infty dv' \int_{v'}^\infty e^{-\beta v^2 - \beta' v'^2} v^i v'^{i'} \, dv.$$

Pour les trouver, on a

$$\int_0^\infty e^{-\beta' v'^2} dv' \int_{v'}^\infty e^{-\beta v^2} v \, dv = \frac{1}{2\beta} \int_0^\infty e^{-\beta v'^2 - \beta' v'^2} dv' = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta\sqrt{\beta + \beta'}},$$

ou en posant

$$(35) \qquad c = \sqrt{\beta + \beta'}, \qquad \frac{8}{\sqrt{\pi}} = \varepsilon,$$

$$\varepsilon \int_0^\infty dv' \int_{v'}^\infty e^{-\beta v^2 - \beta' v'^2} v \, dv = \frac{2}{\beta c}.$$

En différentiant trois fois de suite cette relation par rapport à β', puis les deux premières équations ainsi obtenues par rapport à β, et remarquant qu'on a

$$\frac{dc}{d\beta} = \frac{dc}{d\beta'} = \frac{1}{2c},$$

on trouvera, les limites des intégrales restant les mêmes,

$$(36) \qquad \begin{cases} \varepsilon \mathrm{H}_{1,2} = \dfrac{2}{\beta c^3}, & \varepsilon \mathrm{H}_{1,4} = \dfrac{3}{2\beta c^5}, \\ \varepsilon \mathrm{H}_{1,6} = \dfrac{15}{4\beta c^7}, & \varepsilon \mathrm{H}_{3,2} = \dfrac{1}{\beta^2 c^3} + \dfrac{3}{2\beta c^5}, \\ \varepsilon \mathrm{H}_{3,4} = \dfrac{3}{2\beta^2 c^5} + \dfrac{15}{4\beta c^7}, & \varepsilon \mathrm{H}_{5,2} = \dfrac{2}{\beta^3 c^3} + \dfrac{3}{\beta^2 c^5} + \dfrac{15}{4\beta c^7}. \end{cases}$$

En substituant les valeurs (16) et (33) de φ, φ' dans les formules (25), on aura

$$G = \alpha\alpha' \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\beta v^2 - \beta' v'^2} g v^2 v'^2 \, dv \, dv', \qquad \ldots,$$

Nous poserons

$$(37) \qquad \begin{cases} \dfrac{G}{\alpha\alpha'} = A + B, & \dfrac{G'}{\alpha\alpha'} = A' + B', \\[2ex] \dfrac{G''}{\alpha\alpha'} = A'' + B'', & \dfrac{G'''}{\alpha\alpha'} = A''' + B''', \end{cases}$$

A, A', … correspondant aux portions $v > v'$, et B, B', … à celles où $v > v'$, de sorte que

$$A = \int_0^\infty dv' \int_{v'}^\infty e^{-\beta v^2 - \beta' v'^2} g v^2 v'^2 \, dv, \qquad \ldots.$$

Les formules (19) donnent pour $v > v'$, en employant les signes supérieurs,

$$g = \frac{3v^2 + v'^2}{v}, \qquad g' = \frac{5v^4 + 10v^2v'^2 + v'^4}{v},$$

$$g'' = \frac{v^4 + 6v^2v'^2 + v'^4}{v}, \qquad g''' = \frac{v^2 + v'^2}{v},$$

d'où résultent

$$\varepsilon A = 3H_{3,2} + H_{1,4}, \qquad \varepsilon A' = 5H_{5,2} + 10H_{3,4} + H_{1,6},$$

$$\varepsilon A'' = H_{5,2} + 6H_{3,4} + H_{1,6}, \qquad \varepsilon A''' = H_{3,2} + H_{1,4},$$

ou, d'après les formules (36),

$$\varepsilon A = \frac{3}{\beta^2 c^3} + \frac{6}{\beta c^5}, \qquad \varepsilon A' = \frac{10}{\beta^3 c^3} + \frac{30}{\beta^2 c^5} + \frac{60}{\beta c^7},$$

$$\varepsilon A'' = \frac{2}{\beta^3 c^3} + \frac{12}{\beta^2 c^5} + \frac{30}{\beta c^7}, \qquad \varepsilon A''' = \frac{1}{\beta^2 c^3} + \frac{3}{\beta c^5}.$$

Lorsque $v < v'$, les formules (19) donnent

$$g'' = 4v'(v^2 + v'^2), \qquad g''' = 2v'.$$

Mais il sera préférable, pour conserver les mêmes limites aux intégrales, d'échanger les lettres v et v' de sorte qu'on ait $v > v'$: comme v correspond alors à la seconde espèce, il faudra remplacer $-\beta v^2 - \beta' v'^2$ par $-\beta' v^2 - \beta v'^2$, ou simplement employer des expressions $H'_{i,i'}$ au lieu de $H_{i,i'}$; les premières se déduisent des autres en échangeant β et β'. On aura ainsi

$$\frac{g''}{2} = 2v^3 + 2vv'^2, \qquad g''' = 2v,$$

$$\frac{B''}{2} = 2H'_{5,2} + 2H'_{3,4}, \qquad B''' = 2H'_{3,2},$$

ou, d'après les formules (36),

$$\frac{\varepsilon B''}{2} = \frac{4}{\beta'^3 c^3} + \frac{9}{\beta'^2 c^5} + \frac{15}{\beta' c^7}, \qquad \varepsilon B''' = \frac{2}{\beta'^2 c^3} + \frac{3}{\beta' c^5}.$$

En remarquant que $\beta + \beta' = c^2$, il en résulte

$$\varepsilon(A'' + B''') = \frac{2\beta^2 + \beta'^2}{\beta^2 \beta'^2 c^3} + \frac{3(\beta + \beta')}{\beta\beta' c^5}$$
$$= \frac{2\beta^2 + \beta'^2 + 3\beta\beta'}{\beta^2\beta'^2 c^3} = \frac{(\beta + \beta')(2\beta + \beta')}{\beta^2\beta'^2 c^3} = \frac{2\beta + \beta'}{\beta^2\beta'^2 c};$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon(A'' + B'') = \frac{\beta'^3 + 4\beta^3}{\beta^3\beta'^3 c^3} + \frac{6\beta'^2 + 9\beta^2}{\beta^2\beta'^2 c^5} + \frac{15(\beta + \beta')}{\beta\beta' c^7};$$

les deux derniers termes se réduisent à

$$\frac{3(2\beta'^2 + 3\beta^2 + 5\beta\beta')}{\beta^2\beta'^2 c^5} = \frac{3(\beta + \beta')(3\beta + 2\beta')}{\beta^2\beta'^2 c^5},$$

d'où

$$\frac{1}{2}\varepsilon(A'' + B'') = \frac{4\beta^3 + \beta'^3 + 3\beta\beta'(3\beta + 2\beta')}{\beta^3\beta'^3 c^3}$$
$$= \frac{(\beta + \beta')^2(4\beta + \beta')}{\beta^3\beta'^3 c^3} = \frac{(4\beta + \beta')c}{\beta^3\beta'^3}.$$

On suivra la même marche pour B, B'; les valeurs (19) de g, g', en prenant les signes inférieurs, puis échangeant v et v', deviennent celles qui correspondaient aux signes supérieurs; ainsi B et B' se déduisent

de A, A′ en échangeant β et β'. On a donc

$$\varepsilon(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 3\left(\frac{1}{\beta^2 c^3}+\frac{1}{\beta'^2 c^3}\right)+\frac{6(\beta+\beta')}{\beta\beta' c^6} = 3\,\frac{\beta'^2+\beta^2+2\beta\beta'}{\beta^2\beta'^2 c^3} = \frac{3c}{\beta^2\beta'^2},$$

$$\frac{1}{10}\varepsilon(\mathrm{A}'+\mathrm{B}') = \frac{\beta^3+\beta'^3}{\beta^3\beta'^3 c^3}+\frac{3(\beta^2+\beta'^2)}{\beta^2\beta'^2 c^5}+\frac{6(\beta+\beta')}{\beta\beta' c^7}$$
$$= \frac{\beta^2-\beta\beta'+\beta'^2}{\beta^3\beta'^3 c}+\frac{3(\beta^2+\beta'^2+2\beta\beta')}{\beta^2\beta'^2 c^5}$$
$$= \frac{\beta^2-\beta\beta'+\beta'^2+3\beta\beta'}{\beta^3\beta'^3 c} = \frac{c^3}{\beta^3\beta'^3}.$$

Les valeurs (37) deviennent ainsi

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\,\mathrm{G} = \frac{3c}{\beta^2\beta'^2}, &\qquad &\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\,\mathrm{G}' = \frac{10c^3}{\beta^3\beta'^3},\\ &\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\,\mathrm{G}'' = \frac{2c(4\beta+\beta')}{\beta^3\beta'^3}, &\qquad &\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\,\mathrm{G}''' = \frac{2\beta+\beta'}{\beta^2\beta'^2 c}.\end{aligned}\right.$$

XIII. — Rapport des forces vives totales, le nombre d'espèces étant quelconque.

En substituant les valeurs de G′, G″ dans les formules (29) et (30), on a

$$\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\,\mathrm{P} = \frac{c(4\beta+\beta')}{3\beta^3\beta'^3}-\frac{4c^3}{3\beta^3\beta'^3} = \frac{c(4\beta+\beta'-4c^2)}{3\beta^3\beta'^3} = -\frac{\beta' c}{\beta^3\beta'^3},$$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\,\mathrm{U}'' = -\left(\frac{m+m}{mm'}\right)\frac{\beta' c}{\beta^3\beta'^3}+\frac{c^3}{m\beta^3\beta'^3}$$
$$= \frac{c[m'(\beta+\beta')-(m+m')\beta']}{mm'\beta^3\beta'^3} = \frac{c}{\beta^3\beta'^3}\left(\frac{\beta}{m}-\frac{\beta'}{m'}\right).$$

Il en résulte

$$\mu''' = \mathrm{D}\left(\frac{\beta}{m}-\frac{\beta'}{m'}\right),$$

D étant un coefficient positif; μ''' est l'accroissement de force vive de la première espèce due aux seuls chocs avec la seconde. Les accroissements analogues, dus aux chocs avec la troisième, quatrième, etc. sont de même

$$\mathrm{D}'\left(\frac{\beta}{m}-\frac{\beta''}{m''}\right),\qquad \mathrm{D}''\left(\frac{\beta}{m}-\frac{\beta'''}{m'''}\right),\qquad \ldots,$$

D′, D″, ..., étant positifs. Nous avons vu, au n° XI, que la somme de ces accroissements devait être nulle dans l'état permanent; il faut pour cela que les rapports $\frac{\beta}{m}$, $\frac{\beta'}{m'}$, ⋯ soient tous égaux.

En effet, si cela n'avait pas lieu, $\frac{\beta}{m}$ ne pourrait être le plus grand d'entre eux, ou un des plus grands s'il y en a plusieurs de la valeur maxima, puisque, dans la somme précédente, qui doit être nulle, tous les termes seraient positifs sans être tous nuls. Mais l'accroissement de force vive de chaque espèce doit être séparément nul, et il en résulte pour chacune une condition semblable; il faudrait donc que $\frac{\beta'}{m'}$ ne fût pas le plus grand des rapports $\frac{\beta}{m}$, ⋯, que $\frac{\beta''}{m''}$ ne le fût pas non plus, et ainsi de suite jusqu'au dernier, ce qui est absurde.

Dans la formule (17), mu^2 est la force vive moyenne de translation des molécules de première espèce, maintenant désignée par ζ; on a donc

$$\frac{m}{\beta} = \frac{2}{3}\zeta,$$

et de même

$$\frac{m'}{\beta'} = \frac{2}{3}\zeta', \qquad \dots;$$

par conséquent,

$$(39) \qquad \zeta = \zeta' = \zeta'' = \dots, \qquad \frac{m}{\beta} = \frac{m'}{\beta'} = \frac{m''}{\beta''} = \dots = \frac{2}{3}\zeta,$$

et la force vive de translation moyenne des molécules est la même pour toutes les espèces.

Les formules (29) et (38) donnent

$$\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\left(G''' - \frac{2}{3}G\right) = \frac{2\beta + \beta'}{\beta^2\beta'^2 c} - \frac{2c}{\beta^2\beta'^2} = -\frac{\beta'}{\beta^2\beta'^2 c}.$$

D'après les relations (39),

$$\frac{m + m'}{m'} = \frac{c^2}{\beta'},$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\,Q = \frac{3c}{m\beta^2\beta'^2} - \frac{e^2}{m\beta'}\,\frac{\beta'}{\beta^2\beta'^2 c} = \frac{2c}{m\beta^2\beta'^2} \qquad \text{ou} \qquad Q = \frac{2}{3}\,\frac{G}{m}.$$

Il en résulte que les seconds membres des formules (31) sont les mêmes s'ils correspondent aux mêmes espèces. Il devait en être ainsi, car, en désignant par μ' le second membre de la valeur de $\frac{m+m'}{m'}\,\mu''$ qui reste la même en échangeant la première et la seconde espèce, on a

$$\mu'' = \frac{m'}{m+m'}\,\mu';$$

d'ailleurs, l'accroissement de la force vive de la seconde espèce dû aux chocs avec la première serait pareillement $\frac{m}{m+m'}\,\mu'$; leur somme μ' doit donc bien exprimer ces deux accroissements réunis.

Les formules (39) donnent

$$\frac{mm'}{m+m'} = \frac{m\beta'}{c^2} = \frac{2}{3}\,\frac{\beta\beta'}{c^2}\,\zeta,$$

d'où

$$\frac{mm'}{m+m'}\,\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\,\frac{G'}{10} = \frac{2\zeta}{3}\,\frac{c}{\beta^2\beta'^2},$$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'}\left(\frac{\theta\eta}{3}\,\frac{m+m'}{m'}\,Q - \frac{G'}{10}\right) = \frac{m+m'}{mm'}\left(\frac{\theta\eta}{3}\,\frac{2c}{\beta^2\beta'^2} - \frac{2\zeta}{3}\,\frac{c}{\beta^2\beta'^2}\right).$$

Il en résulte

$$\mu'' = \frac{b}{m}\left[\lambda(\theta\eta - \zeta) + \lambda'(\theta\eta' - \zeta)\right],$$

où

$$b = \frac{\alpha\alpha'}{\varepsilon}\,\frac{2c}{3\beta^2\beta'^2}.$$

Si nous supposons que μ' corresponde aux chocs mutuels de la première espèce, on aura

$$\lambda = \lambda', \qquad \mu' = a(\theta\eta - \zeta),$$

a étant un coefficient positif.

Posons, pour abréger, $\theta\eta_1 - \zeta = y$, $\theta\eta_1' - \zeta = y'$, $\theta\eta_1'' - \zeta = y''$, ..., et supposons d'abord qu'il n'y ait que deux espèces : l'accroissement de la force vive de première espèce, dû à ses chocs, soit avec elle-même, soit avec la seconde, doit être nul, d'où résulte

$$0 = \mu'_1 + \mu''_1 = ay + \frac{b}{m}(\lambda y + \lambda' y').$$

D'autre part, l'accroissement de force vive de la seconde espèce dû à ses chocs avec la première est, comme on l'a vu,

$$\frac{m}{m'}\mu''_1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{b}{m'}(\lambda y + \lambda' y').$$

Pour ses chocs avec elle-même l'accroissement a la forme $a'y'$ analogue à ay, et les deux réunis doivent être nuls. Ainsi a, a', b sont trois nombres positifs tels qu'on a à la fois

$$\left(a + \frac{b\lambda}{m}\right)y + \frac{b\lambda'}{m}y' = 0, \qquad \left(a' + \frac{b\lambda'}{m'}\right)y' + \frac{b\lambda}{m'}y = 0 :$$

le déterminant des coefficients est

$$\left(a + \frac{b\lambda}{m}\right)\left(a' + \frac{b\lambda'}{m'}\right) - \frac{b^2\lambda\lambda'}{mm'} = aa' + b\left(\frac{a'\lambda}{m} + \frac{a\lambda'}{m'}\right)$$

et a tous ses termes positifs ; les deux équations n'ont donc pas d'autre solution que $y = y' = 0$.

S'il y a un nombre quelconque d'espèces, on aura encore

$$\mu'_1 + \mu''_1 + \ldots = 0,$$

en ajoutant à μ''_1 les accroissements de la force vive de première espèce provenant de ses chocs avec la troisième, la quatrième, etc. Ce sera une équation de la forme

$$\mathrm{E}y + \mathrm{E}'y' + \mathrm{E}''y'' + \ldots = 0,$$

sans terme indépendant de y, y', ... Pour chaque espèce il y aura une condition de cette forme. Dans ce système d'équations, en même nombre que les inconnues, le déterminant de leurs coefficients n'est point nul, en général, puisque, s'il n'y a que deux espèces, comme on vient de le voir, il ne l'est pas. Il n'y aura donc d'autre solution que

$$y = y' = y'' = \ldots = 0$$

et, par suite,

$$\eta = \eta' = \eta'' = \ldots.$$

Ainsi la force vive moyenne de rotation est la même pour toutes les espèces, en supposant toutefois que θ soit le même. Le rapport de la force vive totale de rotation à celle de translation sera $\frac{\eta}{\zeta}$ ou $\frac{1}{\theta}$; d'après le n° X, dans le cas d'une espèce unique, en prenant comme première approximation toutes les vitesses égales, on avait $\frac{\eta}{\zeta} = \frac{9}{10\theta}$; le résultat actuel est donc peu différent. Le rapport ρ ou ρ' est le même que $\frac{\eta}{\zeta}$, de sorte qu'en posant $\theta = \frac{3}{2}$ ou 1, on aura

$$\rho = \frac{2}{3}, \qquad \frac{C}{c} = 1 + \frac{2}{5} = 1,400; \qquad \rho' = 1, \qquad \frac{C'}{c'} = 1 + \frac{1}{3} = 1,333.$$

Sans entrer dans le détail des valeurs expérimentales attribuées a. rapport $\frac{C}{c}$, on sait qu'elles diffèrent très peu de 1,400 pour les gaz simples, entre autres l'hydrogène, tandis que, pour l'acide carbonique et d'autres gaz composés, elles diffèrent peu de 1,33. Les molécules gazeuses joueraient ainsi le rôle de solides peu différents d'une sphère, qui, pour les gaz simples, seraient de révolution, et non pour les autres.

Ce fait est lié à celui que les molécules d'hydrogène sont formées de deux atomes, ce qui doit, en effet, leur donner une forme de révolution, tandis que, dans les gaz composés, elles en ont plus de deux.

Quant à ce que j'ai appelé les chocs entre ces molécules, ce mot semble participer de l'incertitude où nous sommes sur leur nature.

On peut toutefois lui donner le sens précis suivant : deux molécules

sont en contact si la distance des centres est telle qu'il s'exerce entre eux l'énergique résistance à la compression qu'on observe dans les corps solides. De la sorte, les effets mécaniques qui résultent du contact des solides existent aussi pour les molécules.

On a vu que, si le milieu est composé de plusieurs espèces, c'est-à-dire est un mélange de plusieurs gaz, la valeur de $\frac{C}{c}$ est la même que pour ces gaz isolés. Ce résultat se réalise pour l'air, dans lequel $\frac{C}{c}$ est également d'environ 1,400.

Sur les fonctions périodiques de deux variables;

Par M. P. APPELL.

INTRODUCTION.

Les fonctions doublement périodiques d'une variable qui se comportent, à distance finie, comme une fraction rationnelle, peuvent toutes, ainsi qu'il est bien connu, s'exprimer par des combinaisons rationnelles de fonctions Θ d'une variable. Après la découverte des fonctions Θ de plusieurs variables faite par Göpel et Rosenhain, on a dû se demander immédiatement si toute fonction de n variables avec $2n$ groupes de périodes, se comportant à distance finie comme une fraction rationnelle, pourrait être exprimée à l'aide des fonctions Θ de n variables. Au premier abord il semble que non, car les périodes d'une fonction Θ de n variables ne peuvent pas être choisies arbitrairement : elles sont liées par $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues. Cependant, dans une conversation qu'il eut avec M. Hermite en 1860, Riemann avait affirmé que ces relations doivent nécessairement exister entre les $2n$ groupes de périodes d'une fonction de n variables, tout au moins après une transformation d'un degré convenable effectuée sur ces périodes; mais il n'a donné aucune indication sur la méthode qui l'avait conduit à ce théorème d'une importance capitale. M. Weierstrass a, depuis, annoncé à quelques-uns de ses élèves qu'il possède une démonstration de ce théorème; mais il n'a ni publié ni indiqué la méthode

dont il fait usage (¹). Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 3 décembre 1883, MM. Poincaré et Picard, s'appuyant sur ce théorème de M. Weierstrass (²) que $(n+1)$ *fonctions de n variables à 2n groupes de périodes sont liées par une relation algébrique* ont donné une démonstration du théorème de Riemann fondée sur la considération d'intégrales de différentielles totales et sur la théorie des intégrales abéliennes.

En me bornant au cas le plus simple de deux variables indépendantes, je me propose, dans ce Mémoire, de traiter directement la question. Partant de l'expression d'une fonction de deux variables, sans singularités essentielles à distance finie, sous forme du quotient de deux fonctions entières, telle qu'elle résulte d'un théorème de M. Poincaré (³), je montre que, si cette fonction admet quatre paires de périodes, on peut toujours les amener à vérifier la relation de Riemann et exprimer la fonction par le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions Θ de deux variables. Je n'ai donc pas à m'appuyer sur l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables à quatre paires de périodes : la méthode suivie permet, au contraire, de démontrer l'existence de cette relation.

Pour appliquer d'abord la méthode à un exemple simple, je commence par traiter le cas des fonctions d'une variable à deux périodes, en m'appuyant sur des résultats relatifs aux fonctions entières, dus à M. Guichard (⁴); puis, je traite, par une méthode toute semblable, le cas des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes. Le Mémoire se termine par quelques remarques sur les fonctions de deux variables avec deux paires de périodes. J'ai laissé de côté l'étude des fonctions à trois paires de périodes qui peut être faite de la même façon.

Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été indiqués

---

(¹) Voir une Lettre de M. Weierstrass à M. Borchardt, *Journal de Crelle*, t. 89.

(²) *Monatsberichte*: 1862.

(³) *Acta mathematica*, t. II.

(⁴) *Annales de l'École Normale*: 1887.

dans deux Notes que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences dans les séances des 6 et 27 janvier 1890.

Le premier Chapitre est entièrement consacré à la démonstration du théorème préliminaire suivant :

Étant données deux fonctions entières $H(x, y)$ *et* $K(x, y)$ *de deux variables indépendantes, vérifiant l'identité*

$$H(x, y+1) - H(x, y) = K(x+1, y) - K(x, y),$$

il existe une troisième fonction entière $G(x, y)$ *vérifiant les deux équations*

$$G(x+1, y) - G(x, y) = H(x, y),$$
$$G(x, y+1) - G(x, y) = K(x, y).$$

CHAPITRE I.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

1. Dans un Mémoire intitulé *Sur la résolution de l'équation aux différences finies* $G(x+1) - G(x) = H(x)$ (*Annales de l'École Normale*, novembre 1887), M. Guichard a démontré le théorème suivant :

Étant donnée une fonction entière quelconque $H(z)$, *il existe une autre fonction entière* $G(z)$ *vérifiant l'équation aux différences finies*

$$(1) \qquad G(z+1) - G(z) = H(z).$$

Comme le fait remarquer M. Guichard, on sait trouver la fonction $G(z)$ quand $H(z)$ est un polynôme

$$H(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n;$$

il suffit pour cela de se servir des polynômes de Bernoulli $\varphi_n(z)$ qui, pour z entier positif, expriment la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des $(z-1)$ premiers nombres entiers

$$\varphi_0(z) = z - 1, \qquad \varphi_1(z) = \frac{z(z-1)}{2}, \qquad \varphi_2(z) = \frac{z(z-1)(2z-1)}{6}, \qquad \ldots$$

polynômes qui vérifient l'identité

$$\varphi_n(z+1) - \varphi_n(z) = z^n;$$

en vertu de cette identité, on aura une fonction satisfaisant à l'équation (1) en prenant

$$G(z) = a_0\varphi_0(z) + a_1\varphi_1(z) + \ldots + a_n\varphi_n(z):$$

la fonction entière la plus générale vérifiant l'équation (1) sera évidemment égale à $G(z)$ augmentée d'une fonction entière admettant la période 1.

Lorsque $H(z)$ est une série entière convergente pour toutes les valeurs de z (fonction entière)

$$H(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

la série

$$a_0\varphi_0(z) + a_1\varphi_1(z) + \ldots + a_n\varphi_n(z) + \ldots$$

n'est pas toujours convergente; on ne peut donc pas étendre aux fonctions entières la méthode élémentaire suivie pour les cas où $H(z)$ est un polynôme. M. Guichard arrive à former dans tous les cas la fonction $G(z)$ en construisant, à l'aide d'une intégrale définie renfermant un paramètre variable z, une fonction qui a des lignes de discontinuité ou *coupures* du genre de celles qui ont été envisagées pour la première fois par M. Hermite (*Journal de Crelle* et *Cours professé à la Faculté des Sciences*); il fait ensuite disparaître ces discontinuités et obtient la fonction cherchée.

Nous modifierons de la façon suivante la méthode de M. Guichard. Nous formerons, à l'aide d'une intégrale définie affectée de coupures,

des fonctions entières $\psi_n(z)$ vérifiant les identités

$$\psi_n(z+1) - \psi_n(z) = z^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et se comportant, quand n est très grand, de telle façon que, si

$$H(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

est une série convergente quel que soit z, il en soit de même de

$$G(z) = a_0 \psi_0(z) + a_1 \psi_1(z) + a_2 \psi_2(z) + \ldots + a_n \psi_n(z) + \ldots;$$

cette dernière série définira alors une fonction entière $G(z)$ répondant à la question. Il est évident que les fonctions $\psi_n(z)$ ne diffèrent des polynômes de Bernoulli $\varphi_n(z)$ que par une fonction entière admettant la période 1 : c'est ce que nous vérifierons, en nous servant des expressions des polynômes de Bernoulli par des intégrales définies données par M. Hermite.

2. Soit n un nombre entier positif; considérons, en suivant la méthode de M. Guichard, l'intégrale définie

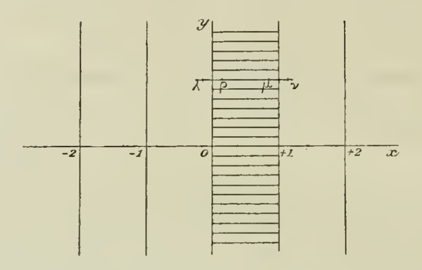
$$H_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} \, \frac{i^{n+1} t^n e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} \, dt,$$

l'intégration étant étendue aux valeurs *réelles* de t, i désignant l'unité imaginaire positive et z une quantité imaginaire $x + yi$. Cette intégrale a un sens bien déterminé quand la partie réelle de z n'est pas un nombre entier, positif, négatif ou nul. Si z est de la forme $m + i\theta$, m étant un entier et θ une quantité réelle, il y a dans l'intégrale un élément infini correspondant à $t = \theta$.

L'intégrale $H_n(z)$ définit donc une fonction de z admettant pour *coupures* les parallèles à l'axe des quantités imaginaires ayant pour équations

$$x = 0, \qquad x = \pm 1, \qquad x = \pm 2, \qquad \ldots.$$

D'après les propriétés des intégrales affectées de coupures, données par M. Hermite (*voir* le *Cours professé à la Faculté des Sciences*), l'intégrale $\Pi_n(z)$ tend vers une limite quand z tend vers un point de l'une des coupures; mais cette limite est différente suivant que z tend vers la coupure en venant d'un côté ou de l'autre. La fonction $\Pi_n(z)$ possède évidemment la période 1, puisque le changement de z en $z+1$



n'altère pas les éléments de l'intégrale. Considérons la bande indéfinie comprise entre les deux droites parallèles $x=0$, $x=1$ (cette bande est couverte de hachures dans la figure); la fonction $\Pi_n(z)$ est uniforme dans l'intérieur de cette bande; nous conviendrons d'appeler valeur de $\Pi_n(z)$ en un point de l'un des bords de la bande la valeur limite vers laquelle tend $\Pi_n(z)$ quand z tend vers ce point *en venant de l'intérieur de la bande*. Ces valeurs de $\Pi_n(z)$ dans la bande

$$0 \leq x \leq 1$$

étant supposées connues, les valeurs de $\Pi_n(z)$ en tous les autres points du plan s'en déduiront par la formule

$$\Pi_n(z+1) = \Pi_n(z).$$

Si λ et ρ sont deux points infiniment voisins situés en face l'un de l'autre sur les deux bords de la coupure $Oy (x=0)$, ρ à droite, λ à gauche, on a, d'après les théorèmes généraux de M. Hermite,

$$\Pi_n(\lambda) - \Pi_n(\rho) = \rho^n.$$

Le point $\mu = \lambda + 1$ est dans la bande ombrée infiniment près de la coupure $x = 1$: comme on a

$$\Pi_n(\mu) = \Pi_n(\lambda + 1) = \Pi_n(\lambda),$$

on voit que

$$\Pi_n(\mu) - \Pi_n(\rho) = \rho^n. \tag{2}$$

Cela posé, considérons une fonction $\psi_n(z)$ définie par les deux conditions suivantes : 1° pour tous les points z situés dans la bande ombrée (comprise entre les droites $x = 0$, $x = 1$) et sur les droites limitant cette bande, on a

$$\psi_n(z) = \Pi_n(z) :$$

2° pour tout autre point du plan, la valeur de $\psi_n(z)$ est définie par la relation

$$\psi_n(z + 1) - \psi_n(z) = z^n. \tag{3}$$

Cette fonction $\psi_n(z)$ n'a plus de coupures : prenons, par exemple, le point

$$\nu = \rho + 1$$

situé en face de μ sur l'autre bord de la coupure $x = 1$: on a, par définition,

$$\psi_n(\nu) = \psi_n(\rho + 1) = \psi_n(\rho) + \rho^n ;$$

d'autre part, d'après (2),

$$\psi_n(\mu) = \Pi_n(\mu) = \Pi_n(\rho) + \rho^n ;$$

comme $\psi_n(\rho) = \Pi_n(\rho)$, on voit que

$$\psi_n(\nu) = \psi_n(\mu) :$$

la fonction ψ_n est donc continue quand on traverse la coupure $x = 1$. La relation (3) montre alors qu'elle est continue sur toutes les autres coupures.

Cette fonction $\psi_n(z)$ est donc une fonction de z holomorphe dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction entière. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer que cette fonction admet une dérivée : cela résultera d'une vérification que nous ferons plus loin (n° 5), en montrant que $\psi_n(z)$ est égale au polynôme de Bernoulli $\varphi_n(z)$ augmenté d'un polynôme entier en $e^{2\pi z i}$ et $e^{-2\pi z i}$.

3. *Valeurs de la fonction* $\psi_n(z)$ *quand* n *est très grand.* — Supposons d'abord la partie réelle de z comprise entre 0 et 1 ; alors $\psi_n(z)$ est donnée par l'intégrale $\mathrm{II}_n(z)$,

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} \, \frac{i^{n+1} t^n e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} \, dt,$$

où le *module* de $\dfrac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}}$ reste, pour toutes les valeurs de t, inférieur à une limite fixe positive A.

Considérons cette intégrale comme la somme de deux intégrales, l'une allant de $-\infty$ à 0, l'autre de 0 à $+\infty$, et, dans la première, changeons t en $-t$, puis intervertissons l'ordre des limites, nous aurons

$$\psi_n(z) = i^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} \left[\frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} + (-1)^n \frac{e^{2\pi t}}{e^{2\pi t} - e^{2\pi z i}} \right] t^n \, dt.$$

Dans cette intégrale le module de la somme entre crochets est moindre que $2\mathrm{A}$, puisque le module de chacun des termes de cette somme est moindre que A ; le module de

$$\frac{1}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}}$$

est moindre que $e^{-2n\pi t}$. On a donc, en désignant, comme M. Weierstrass, par $|Z|$ le module de Z,

$$|\psi_n(z)| < |e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}| \, 2\mathrm{A} \int_0^{\infty} e^{-2n\pi t} t^n \, dt.$$

En faisant

$$2n\pi t = u, \qquad t^n \, dt = \frac{u^n \, du}{(2n\pi)^{n+1}},$$

on voit que

$$\int_0^\infty e^{-2n\pi t} t^n dt = \frac{1}{(2n\pi)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^n du = \frac{\Gamma(n+1)}{(2n\pi)^{n+1}} = \frac{1.2.3\ldots n}{(2n\pi)^{n+1}},$$

quantité évidemment moindre que $\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}$. Soit, d'autre part, ρ celui des modules des deux quantités

$$e^{2\pi z i}, \quad e^{-2\pi z i}$$

qui est le plus grand, de sorte que

$$|e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}| < 2\rho^n;$$

nous aurons enfin

$$(4) \qquad |\psi_n(z)| < \frac{2A}{\pi}\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^n.$$

Pour établir cette formule nous avons supposé la partie réelle de z comprise entre 0 et 1 : voyons ce qui se passe quand cette partie réelle est *nulle*.

Le raisonnement précédent n'est plus applicable, car le module de

$$\frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}}$$

devient infini lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons donc z infiniment voisin de la valeur $i\theta$, θ étant réel, et désignons par ε une quantité positive. L'intégrale définie qui donne $\psi_n(z)$ est de la forme

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, t)\, dt;$$

nous l'écrirons

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} F(z, t)\, dt + \int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} F(z, t)\, dt + \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} F(z, t)\, dt.$$

Dans les deux premières intégrales, le module de

$$\frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}}$$

reste inférieur à une limite positive a. Le module de la somme de ces deux intégrales est donc moindre que l'intégrale

$$a\,|e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi}|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t^n|\,dt}{e^{2n\pi t}+e^{-2n\pi t}},$$

puisque les éléments de cette dernière intégrale sont réels et positifs. plus grands que les modules des éléments correspondants des deux premières intégrales, et que le champ d'intégration est plus étendu. Or cette dernière intégrale est égale à

$$2a\,|e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi}|\int_{0}^{\infty}\frac{t^n\,dt}{e^{2n\pi t}+e^{-2n\pi t}},$$

qui, d'après ce qui précède (formule 4), est moindre que

$$\frac{2a}{\pi}\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^n,$$

ρ désignant le plus grand module des deux quantités $e^{2\pi zi}$ et $e^{-2\pi zi}$. Il reste à étudier l'intégrale

$$\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\mathrm{F}(z,t)\,dt,$$

que nous écrirons comme il suit

$$(5)\quad i(e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi})\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\left(\frac{i^n t^n}{e^{2n\pi t}+e^{-2n\pi t}}-\frac{z^n}{e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi}}\right)\frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t}-e^{2\pi zi}}$$
$$+\,iz^n\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t}-e^{2\pi zi}}.$$

Quand z tend vers $i\theta$, la deuxième de ces intégrales

$$\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t}-e^{2\pi zi}}$$

qui ne dépend pas de n, tend vers une limite finie; si donc on appelle b un nombre positif plus grand que le module de cette limite, on voit

que

$$\left| iz^n \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} \right| < b\,|\theta|^n.$$

Quant à la première intégrale, tous ses éléments restent finis quand on y fait $z = i\theta$, et l'intégrale ainsi obtenue

$$I = \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \left(\frac{i^n t^n}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} - \frac{i^n \theta^n}{e^{2n\pi\theta} + e^{-2n\pi\theta}} \right) \frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t} - e^{-2\pi\theta}}$$

reste finie quand n augmente indéfiniment, car tous ses éléments tendent vers zéro (¹). Si l'on désigne par c un nombre plus grand que le module de cette intégrale, le premier terme de la somme (5) a un module moindre que $2c\rho^n$.

On a donc, enfin, quand $z = i\theta$,

$$|\psi_n(z)| < \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^n + b\,|\theta|^n + 2c\rho^n,$$

ou, en appelant $\frac{2A}{3}$ le plus grand des nombres $\frac{2a}{\pi}$, b, $2c$, et λ le plus grand des nombres $|\theta|$ et ρ,

$$|\psi_n(z)| < 2A\lambda^n,$$

formule analogue à (4). En résumé, quand la partie réelle x de z est nulle ou comprise entre o et 1

$$0 \leqq x < 1,$$

le module de $\psi_n(z)$ quand n augmente indéfiniment reste inférieur à une expression de la forme

$$2A\lambda^n,$$

A et λ désignant des nombres positifs indépendants de n.

(¹) *Voir*, pour la démonstration de ce point, la remarque placée à la fin de ce numéro (p. 169).

Cette proposition s'étend facilement à des valeurs quelconques de z. En effet, la formule fondamentale

$$\psi_n(z+1) = \psi_n(z) + z^n$$

donne les deux formules

$$(6)\quad \begin{cases} \psi_n(z) = \psi_n(z+k) - z^n - (z+1)^n - \ldots - (z+k-1)^n, \\ \psi_n(z) = \psi_n(z-k) + (z-k)^n + (z-k+1)^n + \ldots + (z-1)^n, \end{cases}$$

k désignant un entier positif. Si z a une valeur quelconque, on peut toujours choisir k de telle façon que l'une des deux quantités

$$z+k,\quad z-k$$

ait sa partie réelle comprise entre o et 1 ou égale à o. Supposons, par exemple, que $(z+k)$ remplisse cette condition : la première des formules (6) montre que

$$|\psi_n(z)| \leqq |\psi_n(z+k)| + |z^n| + |(z+1)^n| + \ldots + |(z+k-1)^n|;$$

mais on a, comme nous venons de le voir,

$$|\psi_n(z+k)| < 2B\mu^n;$$

d'autre part, en appelant ν le plus grand des modules des k quantités

$$z,\quad z+1,\quad \ldots,\quad z+k-1$$

le module de la somme de leurs puissances $n^{\text{ièmes}}$ est moindre que $k\nu^n$; donc

$$|\psi_n(z)| < 2B\mu^n + k\nu^n < 2A\lambda^n,$$

en appelant A le plus grand des nombres 2B et k, λ le plus grand des nombres μ et ν.

La deuxième des formules (6) conduit à un résultat identique.

Remarque. — Nous avons admis que le module de l'intégrale

$$I = i^n \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} [\varphi(t) - \varphi(\theta)] \frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t} - e^{-2\pi\theta}},$$

où

$$\varphi(t) = \frac{t^n}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}}$$

(t, θ réels, ε réel positif), reste fini quand n augmente indéfiniment. Pour mettre ce fait en évidence, on peut distinguer deux cas, suivant que θ est nul ou non :

1° $\theta = 0$. Alors $\varphi(\theta) = 0$. Le module du produit

$$\frac{te^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - 1}$$

reste, dans les limites de l'intégration, inférieur à un nombre positif fixe p. Si donc on partage l'intégrale en deux, l'une prise de $-\varepsilon$ à 0, l'autre de 0 à $+\varepsilon$, on aura

$$|I| < 2p \int_0^\varepsilon \frac{t^{n-1}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}}\,dt < 2p \int_0^\varepsilon t^{n-1}\,dt,$$

$$|I| < 2p\frac{\varepsilon^n}{n}.$$

Comme ε peut être supposé moindre que l'unité, on voit que le module de I tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

2° Supposons θ différent de zéro, positif, par exemple. On pourra prendre ε assez petit pour que $\theta - \varepsilon$ soit positif. Écrivons

$$I = i^n \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(\theta)}{t - \theta} \, \frac{e^{-2\pi t}(t - \theta)}{e^{-2\pi t} - e^{-2\pi\theta}}\,dt.$$

Le module du facteur $\frac{e^{-2\pi t}(t - \theta)}{e^{-2\pi t} - e^{-2\pi\theta}}$ reste encore inférieur à un nombre positif p. D'autre part, le théorème des accroissements finis donne

$$\varphi(t) - \varphi(\theta) = (t - \theta)\varphi'(u)$$

u étant compris entre t et θ, c'est-à-dire positif. Comme

$$\varphi'(u) = \frac{nu^{n-1}}{e^{2n\pi u} + e^{-2n\pi u}} - \frac{2n\pi u^n}{e^{2n\pi u} + e^{-2n\pi u}} \frac{e^{2n\pi u} - e^{-2n\pi u}}{e^{2n\pi u} + e^{-2n\pi u}},$$

on a

$$|\varphi'(u)| < nu^{n-1}e^{-2n\pi u} + 2n\pi u^n e^{-2n\pi u},$$

$$|\varphi'(u)| < n\left(\frac{1}{u} + 2\pi\right)(ue^{-2\pi u})^n.$$

Le maximum du produit $ue^{-2\pi u}$ étant $\frac{1}{2\pi e}$, et le facteur $\frac{1}{u} + 2\pi$ restant, dans l'intégrale, inférieur à $\frac{1}{\theta - \varepsilon} + 2\pi$, on aura

$$|\varphi'(u)| < n\left(\frac{1}{\theta - \varepsilon} + 2\pi\right)\left(\frac{1}{2\pi e}\right)^n,$$

d'où

$$|I| < 2np\varepsilon\left(\frac{1}{\theta - \varepsilon} + 2\pi\right)\left(\frac{1}{2\pi e}\right)^n,$$

limite qui tend encore vers zéro pour n infini.

4. *Application à la résolution de deux problèmes de calcul fonctionnel.* — Prenons d'abord le problème de M. Guichard. Soit

$$H(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

une fonction entière : il s'agit de former une fonction entière $G(z)$ vérifiant l'équation

$$G(z+1) - G(z) = H(z). \tag{7}$$

La série

$$G(z) = a_0(z-1) + a_1\psi_1(z) + a_2\psi_2(z) + \ldots + a_n\psi_n(z) + \ldots$$

converge quel que soit z, car le module du terme général $a_n\psi_n(z)$ est moindre que

$$2A\,|a_n|\,\lambda^n,$$

A et λ désignant des constantes indépendantes de n, et la série dont le

terme général est $|a_n|\lambda^n$ est convergente. La série $G(z)$ définit donc une fonction entière vérifiant l'équation (7) [1]. La fonction entière la plus générale vérifiant cette équation est égale à $G(z)$ augmentée d'une fonction entière avec la période 1.

Il est évident que l'on pourra ramener au problème que nous venons de résoudre la détermination d'une fonction $G_1(z)$ vérifiant une équation de la forme

$$G_1(z+\omega) - G_1(z) = H(z),$$

ω désignant une constante quelconque. Il suffira de déterminer une fonction entière $G(z)$ vérifiant l'équation

$$G(z+1) - G(z) = H(\omega z),$$

puis de prendre

$$G_1(z) = G\left(\frac{z}{\omega}\right).$$

Cherchons maintenant à résoudre le même problème pour des fonctions de deux variables indépendantes.

Étant données deux fonctions entières $H(x, y)$ *et* $K(x, y)$ *de deux variables* x *et* y, *former une fonction entière* $G(x, y)$ *vérifiant les deux équations*

$$(8)\qquad \begin{cases} G(x+1, y) - G(x, y) = H(x, y), \\ G(x, y+1) - G(x, y) = K(x, y). \end{cases}$$

Pour que le problème soit possible, il faut que les deux fonctions données H et K vérifient une certaine équation de condition. En effet, en changeant, dans la première des relations (8), y en $y+1$ et ajoutant à la deuxième, on obtient

$$G(x+1, y+1) - G(x, y) = H(x, y+1) + K(x, y);$$

de même, en changeant dans la seconde de ces relations x en $x+1$ et ajoutant le résultat à la première, on a

$$G(x+1, y+1) - G(x, y) = K(x+1, y) + H(x, y).$$

---

(1) *Voir* un Mémoire de M. WEIERSTRASS, *Monatsberichte*, p. 723; 1880.

On doit donc avoir

$$(9) \qquad H(x, y+1) + K(x, y) = K(x+1, y) + H(x, y).$$

Supposons cette condition remplie; le problème est alors possible et l'on peut former la fonction $G(x, y)$ de la façon suivante :

Ordonnons $H(x, y)$ par rapport aux puissances de x

$$H(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x^n h_n(y),$$

les coefficients $h_n(y)$ étant des fonctions entières de y. Si nous posons

$$L(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi_n(x) h_n(y),$$

où $\psi_n(x)$ est la fonction définie précédemment, avec la convention que $\psi_0(x) = x - 1$, et si nous désignons par $M(x, y)$ une fonction entière quelconque de x et y assujettie à la seule condition d'admettre la période 1 par rapport à x,

$$M(x+1, y) = M(x, y),$$

l'expression

$$(10) \qquad G(x, y) = L(x, y) - M(x, y)$$

définit la fonction entière la plus générale vérifiant la première des relations (8)

$$G(x+1, y) - G(x, y) = H(x, y).$$

Il faut déterminer la fonction $M(x, y)$ de telle façon que la fonction (10) vérifie aussi la deuxième des relations (8). Pour cela, remarquons que, si nous retranchons la relation

$$L(x+1, y) - L(x, y) = H(x, y)$$

de celle qu'on en déduit par le changement de y en $y+1$, nous ob-

tenons l'équation

$$L(x+1, y+1) - L(x, y+1) - L(x+1, y) + L(x, y)$$
$$= H(x, y+1) - H(x, y)$$

dont le second membre est égal à

$$K(x+1, y) - K(x, y)$$

en vertu de la relation (9). On peut donc écrire

$$L(x+1, y+1) - L(x+1, y) - K(x+1, y)$$
$$= L(x, y+1) - L(x, y) - K(x, y),$$

ce qui montre que la fonction entière

$$P(x, y) = L(x, y+1) - L(x, y) - K(x, y)$$

admet la période 1 par rapport à x.

Cette fonction $P(x, y)$, ordonnée par rapport à y, est donc de la forme

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} y^n p_n(x),$$

les coefficients $p_n(x)$ étant des fonctions entières de x avec la période 1. Cela posé, en prenant la fonction $G(x, y)$ définie par l'équation (10), on voit que l'expression

(11) $$G(x, y+1) - G(x, y) - K(x, y)$$

est identique à

(12) $$P(x, y) - M(x, y+1) + M(x, y),$$

où la fonction entière $M(x, y)$ est assujettie à la seule condition

d'avoir la période (1) par rapport à x. Prenons pour cette fonction l'expression suivante

$$\mathrm{M}(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi_n(y) p_n(x),$$

où $\psi_0(y) = y - 1$ et où les coefficients $p_n(x)$ sont ceux qui figurent dans le développement de $\mathrm{P}(x, y)$. La fonction M étant ainsi déterminée, l'expression (12) est nulle : il en est de même de l'expression (11) qui lui est égale, et la fonction $\mathrm{G}(x, y)$ vérifie bien les deux relations (8). La fonction la plus générale vérifiant ces deux relations est égale à $\mathrm{G}(x, y)$ augmentée d'une fonction entière admettant la période 1 par rapport à x et à y.

S'il s'agit de former une fonction entière $\mathrm{G}_1(x, y)$ vérifiant deux équations de la forme

$$\mathrm{G}_1(x + a, y) - \mathrm{G}_1(x, y) = \mathrm{H}(x, y),$$
$$\mathrm{G}_1(x, y + b) - \mathrm{G}_1(x, y) = \mathrm{K}(x, y),$$

on formera, comme nous venons de le faire, une fonction $\mathrm{G}(x, y)$ vérifiant les deux relations

$$\mathrm{G}(x + 1, y) - \mathrm{G}(x, y) = \mathrm{H}(ax, by),$$
$$\mathrm{G}(x, y + 1) - \mathrm{G}(x, y) = \mathrm{K}(ax, by),$$

puis l'on prendra

$$\mathrm{G}_1(x, y) = \mathrm{G}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right).$$

5. Pour terminer ce Chapitre, nous montrerons, comme nous l'avons annoncé, que la fonction $\psi_n(z)$ ne diffère du polynôme de Bernoulli $\varphi_n(z)$ que par une expression entière en $e^{2\pi z i}$ et $e^{-2\pi z i}$.

Reprenons l'expression de $\psi_n(z)$ telle que nous l'avons écrite dans le n° **5**, en supposant la partie réelle de z entre 0 et 1,

$$\psi_n(z) = - i^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} \left[\frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} + (-1)^n \frac{e^{2\pi t}}{e^{2\pi t} - e^{2\pi z i}} \right] t^n \, dt.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que n est pair ou impair.

1° Supposons d'abord n impair, $n = 2\nu + 1$; nous aurons alors, en introduisant des fonctions circulaires à la place des exponentielles

$$\psi_{2\nu+1}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{\cos 2n\pi ti} \frac{t^{2\nu+1}\sin 2\pi ti\,dt}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti},$$

ou encore, en ajoutant et retranchant l'unité au premier rapport $\frac{\cos 2n\pi z}{\cos 2n\pi ti}$,

$$\psi_{2\nu+1}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} \frac{\sin 2\pi ti}{\cos 2n\pi ti} t^{2\nu+1}\,dt$$
$$+ i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{2\sin\pi ti\cos\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} t^{2\nu+1}\,dt.$$

D'autre part, d'après M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 79), le polynôme de Bernoulli, $\varphi_{2\nu+1}(z)$, est donné par la formule suivante, où la partie réelle de z est supposée comprise entre 0 et 1,

$$\varphi_{2\nu+1}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{2\sin^2\pi z\cos\pi ti}{\sin\pi ti} \frac{t^{2\nu+1}\,dt}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti}.$$

On a donc, en retranchant les deux expressions de $\psi_{2\nu+1}(z)$ et $\varphi_{2\nu+1}(z)$, et remarquant que

$$2\sin^2\pi ti - 2\sin^2\pi z = \cos 2\pi z - \cos 2\pi ti,$$

$$\psi_{2\nu+1}(z) - \varphi_{2\nu+1}(z)$$
$$= i(-1)^\nu \int_0^\infty \left[\frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} \frac{\sin 2\pi ti}{\cos 2n\pi ti} + \frac{\cos\pi ti}{\sin\pi ti}\right] t^{2\nu+1}\,dt.$$

Cette dernière intégrale est évidemment *un polynôme en* $\cos 2\pi z$, car l'expression

$$\frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti}$$

est un polynôme en $\cos 2\pi z$. C'est ce que nous voulions démontrer.

2° Supposons maintenant n pair, $n = 2\nu$. Nous aurons

$$\psi_{2\nu}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{\cos 2n\pi ti} \frac{e^{-2\pi z i} - \cos 2\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} t^{2\nu}\,dt,$$

ou, encore, en ajoutant et retranchant l'unité au rapport $\frac{\cos 2n\pi z}{\cos 2n\pi ti}$,

$$\psi_{2\nu}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} \frac{e^{-2\pi z i} - \cos 2\pi ti}{\cos 2n\pi ti} t^{2\nu}\, dt$$
$$+ i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi z i} - \cos 2\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} t^{2\nu}\, dt.$$

D'autre part, d'après l'expression du polynôme de Bernoulli $\varphi_{2\nu}(z)$ donnée par M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 79), on a

$$\varphi_{2\nu}(z) = (-1)^\nu \sin 2\pi z \int_0^\infty \frac{t^{2\nu}\, dt}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti}.$$

Calculons la différence $\psi_{2\nu}(z) - \varphi_{2\nu}(z)$, en remarquant l'identité

$$i(e^{-2\pi z i} - \cos 2\pi ti) - \sin 2\pi z = i(\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti),$$

nous aurons

$$\psi_{2\nu}(z) - \varphi_{2\nu}(z)$$
$$= i(-1)^\nu \int_0^\infty \left[\frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} \frac{e^{-2\pi z i} - \cos 2\pi ti}{\cos 2n\pi ti} + 1 \right] t^{2\nu}\, dt;$$

cette dernière intégrale est un *polynôme* en $e^{2\pi z i}$ et $e^{-2\pi z i}$, ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.

CHAPITRE II.

FONCTIONS PÉRIODIQUES D'UNE VARIABLE.

6. Soit $f(x)$ une fonction analytique d'une variable se comportant en tous les points à distance finie comme une fraction rationnelle. Cette fonction peut, d'après les résultats trouvés par M. Weierstrass, se mettre sous la forme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions entières *n'ayant pas de zéros communs*. Cette forme n'est pas unique, car on peut évidemment multiplier le numérateur et le dénominateur par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros*, c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière de x.

Supposons que la fonction $f(x)$ admette une période ω : on aura identiquement

$$\frac{\varphi(x+\omega)}{\psi(x+\omega)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Cette identité montre que les fonctions entières $\varphi(x+\omega)$ et $\varphi(x)$ ont les mêmes zéros; leur rapport, qui n'a ni zéros ni infinis, est donc de la forme $e^{g(x)}$, $g(x)$ désignant une fonction entière, et l'on a

$$\frac{\varphi(x+\omega)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x+\omega)}{\psi(x)} = e^{g(x)}.$$

Soit maintenant $h(x)$ une fonction entière de x vérifiant l'identité

$$h(x+\omega) - h(x) = g(x).$$

Si nous posons

$$\varphi_1(x) = \varphi(x)\, e^{-h(x)},$$
$$\psi_1(x) = \psi(x)\, e^{-h(x)},$$

la fonction $f(x)$ sera le quotient des deux fonctions $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ *n'ayant pas de zéros communs* et vérifiant les deux équations

$$\varphi_1(x+\omega) = \varphi_1(x), \qquad \psi_1(x+\omega) = \psi_1(x).$$

Donc *une fonction uniforme $f(x)$, sans singularités essentielles, qui admet la période ω, peut toujours être mise sous la forme du quotient de deux fonctions entières admettant séparément la période ω.*

Supposons maintenant que la fonction

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

admette une seconde période ω'. On aura encore l'identité

$$\frac{\varphi_1(x+\omega')}{\psi_1(x+\omega')} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)};$$

d'où l'on conclut, comme plus haut,

$$\frac{\varphi_1(x+\omega')}{\varphi_1(x)} = \frac{\psi_1(x+\omega')}{\psi_1(x)} = e^{g_1(x)},$$

$g_1(x)$ désignant une fonction entière.

Comme les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ admettent la période ω, on doit avoir

$$e^{g_1(x+\omega)} = e^{g_1(x)}, \qquad g_1(x+\omega) = g_1(x) - 2ni\pi,$$

n étant un entier. Cette dernière relation, écrite sous la forme

$$g_1(x+\omega) + \frac{2ni\pi}{\omega}(x+\omega) = g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x,$$

montre que la fonction entière

$$g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x$$

admet la période ω et est, par conséquent, développable par la formule de Fourier en une série de la forme

$$g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} a_\nu e^{\frac{2\nu i\pi x}{\omega}}.$$

Nous pourrons alors déterminer une fonction entière $h_1(x)$ admettant la période ω et vérifiant l'équation

$$(13) \qquad h_1(x+\omega') - h_1(x) = g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x - a_0.$$

En effet, cette fonction $h_1(x)$ sera de la forme

$$h_1(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} b_\nu e^{\frac{2\nu i\pi x}{\omega}}.$$

et, en écrivant qu'elle vérifie la relation (13), on aura

$$b_\nu(1 - q^{2\nu}) = a_\nu,$$

où q est la quantité $e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$. Les coefficients b_ν sont ainsi déterminés tous à l'exception de b_0 et la série obtenue pour $h_1(x)$ est convergente pour toutes les valeurs de x, comme celle qui définit $g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x$: cela résulte de ce que le module de $\frac{1}{1-q^{2\nu}}$ reste, pour toutes les valeurs entières de ν, autres que zéro, inférieur à une limite fixe. Si, pour une valeur de ν non nulle, ce module devenait infini, le rapport des périodes $\frac{\omega'}{\omega}$ serait réel et commensurable, et ces deux périodes se réduiraient à une seule. La fonction $h_1(x)$ étant déterminée, si l'on pose

$$\Phi(x) = \varphi_1(x)\,e^{-h_1(x)},$$
$$\Psi(x) = \psi_1(x)\,e^{-h_1(x)},$$

les fonctions Φ et Ψ n'auront pas de zéros communs, et la fonction $f(x)$ sera donnée par l'expression

$$f(x) = \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)},$$

les fonctions entières Φ et Ψ admettant la période ω et vérifiant les relations

$$(14)\qquad \begin{cases} \Phi(x+\omega') = e^{-\frac{2m\pi x}{\omega}+a_0}\,\Phi(x), \\ \Psi(x+\omega') = e^{-\frac{2m\pi x}{\omega}+a_0}\,\Psi(x). \end{cases}$$

Les fonctions Φ et Ψ sont développables par la formule de Fourier en séries de la forme

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}}, \qquad \Psi(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} B_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}};$$

on déterminera les coefficients A_ν et B_ν en exprimant que ces fonctions

vérifient les relations (14). Si l'on suppose, comme d'habitude, que dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i est positif, on reconnaît que les séries ainsi obtenues définissant Φ et Ψ ne sont convergentes que si n est positif. Les séries ainsi obtenues pour Φ et Ψ sont composées, comme il est bien connu, à l'aide de fonctions Θ.

On trouve de cette façon, *a priori* et en partant de la seule notion de la double périodicité, l'expression des fonctions doublement périodiques par des quotients de fonctions Θ.

On pourra montrer de même qu'une fonction $f(x)$ sans singularités essentielles vérifiant des relations de la forme

$$f(x+\omega) = e^{l(x)} f(x),$$
$$f(x+\omega') = e^{l_1(x)} f(x),$$

où $l(x)$ et $l_1(x)$ sont des fonctions entières, est égale au produit d'une exponentielle de la forme $e^{G(x)}$ par un quotient de fonctions Θ [1]; ce résultat conduit, en particulier, à l'expression des fonctions doublement périodiques de seconde et troisième espèce.

CHAPITRE III.

FONCTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX VARIABLES.

7. Dans le Chapitre précédent nous avons montré, par une méthode directe, que toutes les fonctions doublement périodiques, sans singularités essentielles, peuvent être exprimées par un quotient de fonctions Θ. Le but principal que nous poursuivons maintenant est de montrer, par une méthode analogue, que toute fonction quadruple-

---

(1) *Voir* le Mémoire de M. Guichard (*Annales de l'École Normale*, novembre 1887), où se trouvent traitées, à un tout autre point de vue, de nombreuses questions de ce genre.

ment périodique de deux variables, sans singularités essentielles à distance finie, peut être exprimée à l'aide des fonctions Θ de deux variables.

Nous commencerons par rappeler quelques propriétés fondamentales des fonctions uniformes de deux variables, en complétant, par une remarque, un beau théorème de M. Poincaré.

8. D'après un théorème de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. II), une fonction analytique uniforme $f(x, y)$ de deux variables x et y, se comportant comme une fraction rationnelle en tous les points à distance finie, peut s'écrire sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ étant *entières*, et ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction $f(x, y)$ est indéterminée. Précisons ce dernier point en nous reportant au Mémoire de M. Weierstrass : *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*, dont l'exposition détaillée a fait le sujet de la Thèse de doctorat de M. Dautheville (Paris, 1885). Soit

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

un point où les deux fonctions φ et ψ s'annulent. Faisons, comme à la page 25 de la Thèse de M. Dautheville, le changement de variables

$$x - x_0 = c_{11} x_1 + c_{12} y_1, \qquad y - y_0 = c_{21} x_1 + c_{22} y_1,$$

le déterminant des constantes c_{ik}

$$c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}$$

étant différent de zéro et les deux séries φ et ψ ne s'annulant pas identiquement (quel que soit x_1) pour $y_1 = 0$. Alors on peut déterminer un domaine δ du point $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, dans lequel on a

$$\varphi(x, y) = P\varphi_0, \qquad \psi(x, y) = Q\psi_0,$$

φ_0 et ψ_0 désignant des séries qui ne s'annulent pas dans le domaine δ, P et Q des polynômes en x_1,

$$P = x_1^\mu + P_1 x_1^{\mu-1} + \ldots + P_\mu,$$
$$Q = x_1^\nu + Q_1 x_1^{\nu-1} + \ldots + Q_\nu,$$

dont les coefficients $P_1, \ldots, P_\mu, Q_1, \ldots, Q_\nu$ sont des séries entières en y_1 dépourvues de termes constants. *On peut toujours supposer le domaine δ assez petit pour que ces deux polynômes ne puissent s'annuler simultanément dans ce domaine que pour $x_1 = y_1 = 0$.*

En effet, formons le résultant de ces deux polynômes : ce sera une série entière en y_1 dépourvue de terme constant. Si ce résultant n'est pas *identiquement nul,* on pourra prendre δ assez petit pour que, dans le domaine δ, il ne s'annule que pour $y_1 = 0$; ce qui démontre la proposition. Si ce résultant était identiquement nul, quelle que soit la valeur attribuée à y_1 dans le domaine δ, les deux polynômes P et Q en x_1 admettraient un diviseur commun D de la même forme qu'eux,

$$P = DP', \qquad Q = DQ',$$

et l'on pourrait trouver dans le domaine δ des valeurs de x_1 et y_1 annulant D sans annuler simultanément P′ et Q′; on aurait ainsi des systèmes de valeurs annulant φ et ψ sans que, pour ces valeurs, le rapport

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{P\varphi_0}{Q\psi_0} = \frac{P'\varphi_0}{Q'\psi_0}$$

soit *indéterminé;* ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur les deux fonctions entières φ et ψ.

Cela posé, admettons que la fonction $f(x,y)$ ait été mise d'une autre façon sous la forme

$$f(x,y) = \frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)},$$

φ_1 et ψ_1 étant également des fonctions entières. On aura l'identité

$$(15) \qquad \frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)} = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}.$$

Nous allons montrer que le rapport

$$(16) \qquad \frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi(x,y)}$$

est une fonction *régulière en tous les points à distance finie,* c'est-à-dire *une fonction entière* $G(x,y)$. De sorte que l'identité (15) entraîne

$$\varphi_1(x,y) = G(x,y)\,\varphi(x,y),$$
$$\psi_1(x,y) = G(x,y)\,\psi(x,y).$$

Les seuls points où le rapport (16) $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ peut cesser d'être régulier sont les points où $\varphi(x,y)$ s'annule. Soit x_0, y_0 un de ces points; deux cas sont à distinguer, suivant que $\psi(x,y)$ s'annule ou non au point x_0, y_0 :

1° La fonction $\psi(x,y)$ ne s'annule pas au point x_0, y_0; alors, comme l'identité (15) donne

$$\frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{\psi_1(x,y)}{\psi(x,y)},$$

et que le second rapport est régulier au point x_0, y_0, il en est de même du premier.

2° La fonction $\psi(x,y)$ s'annule aussi au point x_0, y_0. Alors $\varphi_1(x,y)$ s'annule également en ce point, car, si cette fonction n'était pas nulle, le premier terme de l'identité (15) aurait au point x_0, y_0 une valeur déterminée, finie ou infinie, et le second terme serait indéterminé au même point; ce qui est impossible.

Les trois fonctions

$$\varphi(x,y), \quad \psi(x,y), \quad \varphi_1(x,y)$$

s'annulant au même point x_0, y_0, faisons, comme plus haut,

$$x - x_0 = c_{11}x_1 + c_{12}y_1, \qquad y - y_0 = c_{21}x_1 + c_{22}y_1,$$

le déterminant des constantes c_{ik} n'étant pas nul, et ces constantes étant choisies de telle façon que les trois fonctions ne s'annulent pas

identiquement pour $y_1 = 0$, quel que soit x_1. On a alors, dans un certain domaine δ du point $x_1 = 0$, $y_1 = 0$,

$$\varphi(x,y) = P\varphi_0, \qquad \psi(x,y) = Q\psi_0, \qquad \varphi_1(x,y) = R\varphi_{1,0}.$$

φ_0, ψ_0 et $\varphi_{1,0}$ désignant des séries qui ne s'annulent pas dans le domaine δ, P, Q, R des polynômes en x_1,

$$P = x_1^\mu + P_1 x_1^{\mu-1} + \ldots + P_\mu,$$
$$Q = x_1^\nu + Q_1 x_1^{\nu-1} + \ldots + Q_\nu,$$
$$R = x_1^\rho + R_1 x_1^{\rho-1} + \ldots + R_\rho.$$

dont les coefficients sont des séries entières en y_1 dépourvues de termes constants. Si l'on remplace $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ et $\varphi_1(x,y)$ par ces expressions dans l'identité (15)

$$\frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)} = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)},$$

on a une relation qu'on peut écrire

$$(17) \qquad \frac{QR}{P} = \frac{\varphi_0\psi_1(x,y)}{\varphi_{1,0}\psi_0}.$$

Le second membre de cette identité est une fonction régulière dans le domaine δ, puisque les séries $\varphi_{1,0}$ et ψ_0 ne s'annulent pas dans ce domaine : le premier membre est donc aussi une fonction régulière dans ce domaine. Il en résulte que le polynôme R doit être divisible par P. En effet, donnons à y_1 une valeur non nulle assez petite pour que les p racines du polynôme P soient dans le domaine δ; si δ est assez petit, aucune de ces racines ne peut annuler Q, comme nous l'avons vu, elles annulent donc toutes R : car, autrement, en faisant x_1 égal à une de ces racines, on rendrait le premier membre infini, le second restant fini dans l'identité (17). Donc, quelle que soit la valeur attribuée à y_1, pourvu que son module soit inférieur à une certaine limite, les μ racines du polynôme P annulent R. Le polynôme R est donc divisible par P, et l'on a

$$R = PR'.$$

R′ étant un polynôme de la même forme que R. Le rapport

$$\frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{R\varphi_{1,0}}{P\varphi_0} = R'\frac{\varphi_{1,0}}{\varphi_0}$$

se comporte donc régulièrement dans le domaine δ et, en particulier, au point x_0, y_0.

C'est ce que nous voulions démontrer.

9. Soit $f(x,y)$ une fonction uniforme de x et y se comportant à distance finie comme une fraction rationnelle. Cette fonction peut s'écrire sous forme du quotient de deux fonctions entières $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)},$$

les fonctions φ et ψ ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction est réellement indéterminée. Ce mode de représentation n'est pas unique; on en obtient évidemment une infinité d'autres possédant les mêmes propriétés en multipliant le numérateur et le dénominateur de $f(x,y)$ par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros*, c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière.

Supposons que la fonction $f(x,y)$ admette un groupe de périodes (a,b), c'est-à-dire que

$$f(x+a, y+b) = f(x,y).$$

On aura l'identité

$$\frac{\varphi(x+a, y+b)}{\psi(x+a, y+b)} = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}. \tag{18}$$

La fonction $f(x,y)$ est ainsi mise sous la forme du quotient de deux nouvelles fonctions entières

$$\varphi(x+a, y+b) \qquad \text{et} \qquad \psi(x+a, y+b).$$

On aura donc, en vertu de la remarque que nous avons faite dans

le numéro précédent,

$$\varphi(x+a, y+b) = G(x, y)\,\varphi(x, y),$$
$$\psi(x+a, y+b) = G(x, y)\,\psi(x, y),$$

$G(x, y)$ désignant une fonction entière.

Si dans l'identité (18) nous faisons pour un instant

$$x = x' - a, \qquad y = y' - b,$$

elle devient

$$\frac{\varphi(x', y')}{\psi(x', y')} = \frac{\varphi(x'-a, y'-b)}{\psi(x'-a, y'-b)},$$

ce qui montre que le rapport

$$\frac{\varphi(x'-a, y'-b)}{\varphi(x', y')} = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x+a, y+b)} = \frac{1}{G(x, y)}$$

est une fonction entière. La fonction $G(x, y)$ est donc telle que son inverse est aussi une fonction entière, d'où l'on conclut que $G(x, y)$ est de la forme

$$G(x, y) = e^{g(x,y)},$$

où $g(x, y)$ est une fonction entière.

En résumé, si la fonction $f(x, y)$ admet un groupe de périodes (a, b), on a

$$(19) \qquad \frac{\varphi(x+a, y+b)}{\varphi(x, y)} = \frac{\psi(x+a, y+b)}{\psi(x, y)} = e^{g(x,y)}.$$

10. Cela posé, supposons d'abord que la fonction $f(x, y)$ ait deux groupes de périodes que nous pouvons toujours, pour simplifier, ramener à être $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$,

$$f(x+2\pi i, y) = f(x, y), \qquad f(x, y+2\pi i) = f(x, y).$$

Nous aurons

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+2\pi i, y)}{\varphi(x,y)} = \dfrac{\psi(x+2\pi i, y)}{\psi(x,y)} = e^{g(x,y)}, \\[2mm] \dfrac{\varphi(x, y+2\pi i)}{\varphi(x,y)} = \dfrac{\psi(x, y+2\pi i)}{\varphi(x,y)} = e^{h(x,y)}, \end{cases}$$

$g(x,y)$ et $h(x,y)$ désignant des fonctions entières.

Si, dans la première des relations (20), on change y en $y+2\pi i$ et si l'on tient compte de la deuxième, il vient

$$\frac{\varphi(x+2\pi i, y+2\pi i)}{\varphi(x,y)} = e^{g(x,y+2\pi i)+h(x,y)};$$

de même, en changeant, dans la seconde, x en $x+2\pi i$ et en tenant compte de la première, on a

$$\frac{\varphi(x+2\pi i, y+2\pi i)}{\varphi(x,y)} = e^{g(x,y)+h(x+2\pi i,y)}.$$

Donc

$$g(x,y+2\pi i)+h(x,y) = g(x,y)+h(x+2\pi i,y)-2ni\pi,$$

où n est un nombre entier; nous écrirons cette formule de la façon suivante

$$(21)\quad \begin{cases} g(x,y+2\pi i)-g(x,y) \\ \quad = h(x+2\pi i,y)-n(x+2\pi i)-h(x,y)+nx. \end{cases}$$

Cela posé, formons, par la méthode indiquée au n° 4, une fonction entière $\lambda(x,y)$, vérifiant les deux relations

$$\lambda(x+2\pi i,y)-\lambda(x,y) = g(x,y),$$
$$\lambda(x,y+2\pi i)-\lambda(x,y) = h(x,y)-nx,$$

compatibles en vertu de la relation (21); et soient

$$\varphi_1(x,y) = \varphi(x,y)e^{-\lambda(x,y)},$$
$$\psi_1(x,y) = \psi(x,y)e^{-\lambda(x,y)};$$

on aura une nouvelle expression de la fonction $f(x, y)$,

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)},$$

où le numérateur et le dénominateur ne s'annulent simultanément qu'aux points où la fonction est indéterminée, et vérifient les deux relations

$$(22) \quad \begin{cases} \varphi_1(x + 2\pi i, y) = \varphi_1(x, y), \\ \varphi_1(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\varphi_1(x, y), \\ \psi_1(x + 2\pi i, y) = \psi_1(x, y), \\ \psi_1(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\psi_1(x, y). \end{cases}$$

Nous avons vu qu'une fonction d'une variable, sans singularités essentielles, avec une période, peut toujours s'écrire sous forme du quotient de deux fonctions entières, sans zéros communs, admettant séparément la même période. Pour la fonction $f(x, y)$ de deux variables avec deux groupes de périodes, nous venons d'obtenir un résultat différent. Cette fonction peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières φ_1 et ψ_1, ne s'annulant simultanément qu'aux points d'indétermination et vérifiant les équations (22), c'est-à-dire n'admettant pas séparément les deux groupes de périodes de $f(x, y)$. On pourrait néanmoins mettre la fonction $f(x, y)$ sous forme du quotient de deux fonctions entières admettant séparément les deux groupes de périodes; mais cette nouvelle expression ne serait pas *irréductible*, en ce sens que son numérateur et son dénominateur seraient égaux à $\varphi_1(x, y)$ et $\psi_1(x, y)$ multipliés par une même fonction entière s'annulant nécessairement. C'est ce que nous montrerons dans un paragraphe particulier (n° **17**).

11. Imaginons maintenant que la fonction $f(x, y)$ admette deux autres groupes de périodes

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

c'est-à-dire que

$$f(x + \alpha, y + \beta) = f(x, y),$$
$$f(x + \alpha', y + \beta') = f(x, y).$$

On aura les deux identités

$$\frac{\varphi_1(x+\alpha, y+\beta)}{\psi_1(x+\alpha, y+\beta)} = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)},$$
$$\frac{\varphi_1(x+\alpha', y+\beta')}{\psi_1(x+\alpha', y+\beta')} = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)};$$

d'où l'on conclut, comme nous l'avons montré au n° **9**, pour une paire de périodes quelconque,

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(x+\alpha, y+\beta)}{\varphi_1(x, y)} = \dfrac{\psi_1(x+\alpha, y+\beta)}{\psi_1(x, y)} = e^{g_1(x,y)}, \\[2ex] \dfrac{\varphi_1(x+\alpha', y+\beta')}{\varphi_1(x, y)} = \dfrac{\psi_1(x+\alpha', y+\beta')}{\psi_1(x, y)} = e^{h_1(x,y)}, \end{cases}$$

g_1 et h_1 désignant des fonctions entières. La comparaison des relations (23) et (22) va nous donner immédiatement des propriétés importantes de ces fonctions $g_1(x, y)$ et $h_1(x, y)$. Comme les fonctions φ_1 et ψ_1 admettent, par rapport à x, la période $2\pi i$, la première des relations (23) montre que l'on a

$$e^{g_1(x+2\pi i, y)} = e^{g_1(x,y)}, \qquad g_1(x+2\pi i, y) = g_1(x, y) + 2ai\pi.$$

a désignant un nombre entier. Dans la première des relations (23) changeons y en $y + 2\pi i$ et rappelons-nous que

$$\varphi_1(x, y+2\pi i) = e^{nx}\varphi_1(x, y),$$
$$\varphi_1(x+\alpha, y+\beta+2\pi i) = e^{nx+n\alpha}\varphi_1(x+\alpha, y+\beta),$$

nous aurons

$$e^{g_1(x, y+2i\pi)} = e^{n\alpha+g_1(x,y)};$$

d'où

$$g_1(x, y+2i\pi) = g_1(x, y) + n\alpha + 2bi\pi,$$

b désignant un entier. Les deux formules ainsi obtenues montrent que la fonction

$$(24)\qquad g_1(x, y) - ax - by - \frac{n\alpha}{2i\pi}y$$

admet la période $2i\pi$ par rapport à x et aussi par rapport à y. Elle est donc, par la formule de Fourier, développable en une double série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de e^x et e^y,

$$g_1(x, y) - ax - by - \frac{n\alpha}{2i\pi}y = \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} A_{p,q} e^{px+qy},$$

p et q désignant des entiers prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Cette formule donne

$$(25) \qquad g_1(x, y) = ax + by + \frac{n\alpha}{2i\pi}y + \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} A_{p,q} e^{px+qy}.$$

En partant de la seconde des relations (23) on trouvera de même

$$(26) \qquad h_1(x, y) = a'x + b'y + \frac{n\alpha'}{2i\pi} + \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} B_{p,q} e^{px+qy},$$

a' et b' désignant des entiers.

Enfin la comparaison des deux relations (23) va nous fournir une dernière équation liant les fonctions g_1 et h_1. Écrivons les relations (23)

$$\frac{\varphi_1(x+\alpha, y+\beta)}{\varphi_1(x, y)} = e^{g_1(x,y)},$$

$$\frac{\varphi_1(x+\alpha', y+\beta')}{\varphi_1(x, y)} = e^{h_1(x,y)};$$

dans la première changeons x et $x+\alpha'$, y en $y+\beta'$ et tenons compte de la deuxième; nous aurons

$$\frac{\varphi_1(x+\alpha+\alpha', y+\beta+\beta')}{\varphi_1(x, y)} = e^{g_1(x+\alpha', y+\beta')+h_1(x,y)};$$

puis changeons dans la deuxième x en $x+\alpha$, y en $y+\beta$ et tenons compte de la première; nous aurons de même

$$\frac{\varphi_1(x+\alpha+\alpha', y+\beta+\beta')}{\varphi_1(x, y)} = e^{g_1(x,y)+h_1(x+\alpha, y+\beta)}.$$

On en conclut que les deux exponentielles formant les seconds membres sont égales, c'est-à-dire

$$g_1(x+\alpha', y+\beta') + h_1(x, y) = g_1(x, y) + h_1(x+\alpha, y+\beta) + 2Ni\pi,$$

N étant un entier.

Écrivons cette relation sous la forme

$$(27)\qquad \begin{cases} g_1(x+\alpha', y+\beta') - g_1(x, y) \\ \quad = h_1(x+\alpha, y+\beta) - h_1(x, y) + 2Ni\pi, \end{cases}$$

et remplaçons-y $g_1(x, y)$ et $h_1(x, y)$ par les développements en séries (25) et (26) obtenus précédemment. Nous aurons, en égalant les coefficients de e^{px+qy} dans les deux membres de la relation (27),

$$(28)\qquad A_{p,q}(e^{p\alpha'+q\beta'} - 1) = B_{p,q}(e^{p\alpha+q\beta} - 1),$$

tant que p et q ne sont pas nuls tous deux. Puis, en égalant les termes indépendants de e^x et e^y dans les deux membres de la relation (27)

$$(29)\qquad a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2Ni\pi.$$

On arrive ainsi à une relation entre les périodes qui est des plus dignes d'attention. Elle permet, en effet, de montrer que, par une transformation convenable, on peut ramener les quatre paires de périodes à la forme normale $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, (A, B), (A', B') avec la condition

$$B = A'.$$

Mais il faut que nous nous assurions d'abord de ce fait que les coefficients

$$a, \quad a', \quad b, \quad b', \quad n, \quad N$$

ne sont pas tous nuls; c'est ce qui résultera des développements suivants.

12. Déterminons une fonction entière $\lambda(x, y)$ par les conditions

suivantes : cette fonction doit admettre la période $2i\pi$ par rapport à x et à y séparément ; elle doit de plus vérifier les deux relations compatibles

$$(30)\quad \begin{cases} \lambda(x+\alpha, y+\beta) - \lambda(x, y) \\ \qquad = g_1(x, y) - ax - by - \dfrac{n\alpha}{2i\pi} y - A_{0,0} = \sum' A_{p,q} e^{px+qy}, \\ \lambda(x+\alpha', y+\beta') - \lambda(x, y) \\ \qquad = h_1(x, y) - a'x - b'y - \dfrac{n\alpha'}{2i\pi} y - B_{0,0} = \sum' B_{p,q} e^{px+qy}, \end{cases}$$

le signe $\sum'$ signifiant que la sommation est étendue aux valeurs entières de p et q, de $-\infty$ à $+\infty$, la combinaison $p = q = 0$ étant exceptée.

La fonction $\lambda(x, y)$ devant admettre la période $2i\pi$, par rapport à x et à y, est donnée par une série de la forme

$$\lambda(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} C_{p,q} e^{px+qy}.$$

En écrivant que cette fonction vérifie les relations (30), on détermine tous les coefficients $C_{p,q}$, sauf $C_{0,0}$, par les formules

$$(31)\qquad C_{p,q} = \frac{A_{p,q}}{e^{p\alpha+q\beta} - 1} = \frac{B_{p,q}}{e^{p\alpha'+q\beta'} - 1},$$

qui sont *compatibles* en vertu de la relation (28) établie précédemment,

$$(28)\qquad A_{p,q}(e^{p\alpha'+q\beta'} - 1) = B_{p,q}(e^{p\alpha+q\beta} - 1).$$

Il nous reste à démontrer qu'en prenant ces valeurs (31) pour les coefficients $C_{p,q}$, autres que $C_{0,0}$, la série qui définit $\lambda(x, y)$ est *convergente quels que soient x et y*.

La démonstration repose sur les deux faits suivants qui sont connus et sur lesquels nous reviendrons plus loin (n° **14**).

1° Les quantités

$$e^{p\alpha+q\beta} - 1, \quad e^{p\alpha'+q\beta'} - 1$$

ne peuvent pas s'annuler pour des valeurs de p et q, non nulles toutes deux, car autrement il y aurait réduction dans les périodes.

2° Quelque petit que soit un nombre positif ε, il existe une infinité de nombres p et q tels que

$$|e^{p\alpha+q\beta}-1| \leqq \varepsilon;$$

mais on peut prendre ε assez petit pour qu'en même temps

$$|e^{p\alpha'+q\beta'}-1| > \varepsilon.$$

En d'autres termes, il est impossible que, quelque petit que soit un nombre positif, il existe des entiers p et q rendant en même temps les modules de

$$e^{p\alpha+q\beta}-1, \quad e^{p\alpha'+q\beta'}-1$$

moindres que ce nombre.

Cela posé, le nombre ε étant choisi, comme nous venons de le dire, partageons la série qui donne $\lambda(x, y)$ en deux parties,

$$\lambda(x, y) = C_{0,0} + \sum\nolimits_1 C_{p,q}\, e^{px+qy} + \sum\nolimits_2 C_{p,q}\, e^{px+qy},$$

la première partie $\sum_1$ comprenant les termes qui correspondent aux valeurs de p et q pour lesquelles

$$|e^{p\alpha+q\beta}-1| > \varepsilon,$$

la deuxième $\sum_2$ comprenant les termes dans lesquels

$$|e^{p\alpha+q\beta}-1| \leqq \varepsilon,$$

et, par suite,

$$|e^{p\alpha'+q\beta'}-1| > \varepsilon.$$

La première partie $\sum_1$ est convergente; car, d'après la valeur

$$C_{p,q} = \frac{A_{p,q}}{e^{p\alpha+q\beta}-1},$$

le module d'un terme de $\sum_1$ est moindre que

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \mathrm{A}_{p,q} e^{px+qy} \right|,$$

c'est-à-dire moindre que le module d'un terme de la série absolument convergente

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum{}' \mathrm{A}_{p,q} e^{px+qy}.$$

La deuxième partie $\sum_2$ est également convergente; car, d'après la valeur

$$\mathrm{C}_{p,q} = \frac{\mathrm{B}_{p,q}}{e^{p\alpha'+q\beta'} - 1},$$

le module d'un terme de $\sum_2$ est moindre que

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \mathrm{B}_{p,q} e^{px+qy} \right|,$$

c'est-à-dire moindre que le module d'un terme de la série absolument convergente

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum{}' \mathrm{B}_{p,q} e^{px+qy}.$$

15. La fonction entière $\lambda(x, y)$ étant ainsi déterminée, posons

$$\Phi(x, y) = \varphi_1(x, y)\, e^{-\lambda(x,y)},$$
$$\Psi(x, y) = \psi_1(x, y)\, e^{-\lambda(x,y)},$$

on aura

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)} = \frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)},$$

où les fonctions entières $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ ne s'annulent simultanément qu'aux points d'indétermination, et vérifient les relations suivantes, qui sont une conséquence immédiate des relations (22) et (23)

que vérifient φ_1 et ψ_1 et des relations (30) que vérifie $\lambda(x, y)$.

$$(32) \quad \begin{cases} \dfrac{\Phi(x+2\pi i, y)}{\Phi(x, y)} = \dfrac{\Psi(x+2\pi i, y)}{\Psi(x, y)} = 1, \\ \dfrac{\Phi(x, y+2\pi i)}{\Phi(x, y)} = \dfrac{\Psi(x, y+2\pi i)}{\Psi(x, y)} = e^{nx}, \\ \dfrac{\Phi(x+\alpha, y+\beta)}{\Phi(x, y)} = \dfrac{\Psi(x+\alpha, y+\beta)}{\Psi(x, y)} = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2i\pi}y+c}, \\ \dfrac{\Phi(x+\alpha', y+\beta')}{\Phi(x, y)} = \dfrac{\Psi(x+\alpha', y+\beta')}{\Psi(x, y)} = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2i\pi}y+c'}, \end{cases}$$

où c et c' désignent les constantes $A_{0,0}$ et $B_{0,0}$. On voit maintenant avec facilité que ces fonctions entières Φ et Ψ peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions Θ.

Commençons par montrer, comme nous l'avons déjà annoncé, que les entiers

$$a, \quad b, \quad a', \quad b', \quad n$$

ne peuvent pas être tous nuls. Nous allons montrer que les nombres a, b, n ne peuvent pas être nuls en même temps. Si ces trois nombres étaient nuls, la fonction $\Phi(x, y)$ serait une fonction entière admettant les groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$ et se reproduisant multipliée par une constante quand on ajoute à x et à y le groupe de périodes (α, β). Or une telle fonction se réduit à une fonction exponentielle. En effet, on aura d'abord

$$\Phi(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} a_{p,q} e^{px+qy};$$

puis, exprimant que cette fonction vérifie l'équation

$$\Phi(x+\alpha, y+\beta) = e^c \Phi(x, y),$$

on trouve

$$\alpha_{p,q}(e^{p\alpha+q\beta} - e^c) = 0.$$

Donc, tous les coefficients $a_{p,q}$ sont nuls, à moins qu'il n'existe un

système de valeurs de p et q,

$$p = \mathrm{P}, \qquad q = \mathrm{Q},$$

telles que

$$e^{\mathrm{P}\alpha + \mathrm{Q}\beta} = e^{c}.$$

Le coefficient $a_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ est alors arbitraire. Mais ce fait peut se présenter au plus pour un système de valeurs de p et q, car, si l'on avait aussi

$$e^{p\alpha+q\beta} = e^{c},$$

on en conclurait

$$(\mathrm{P}-p)\alpha + (\mathrm{Q}-q)\beta = 2k\pi i \qquad (k \text{ entier}),$$

et il y aurait réduction dans les périodes (n° **14**). La fonction Φ se réduit donc à un seul terme

$$\Phi(x, y) = \mathrm{A}e^{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y};$$

on trouve de même

$$\Psi = \mathrm{B}e^{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y}$$

et, par suite, la fonction $f(x, y)$ serait *constante*.

Revenons donc aux relations (32),

$$(32)\quad \begin{cases} \Phi(x+2\pi i, y) = \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\Phi(x, y), \\ \Phi(x+\alpha, y+\beta) = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2\pi i}y+c}\,\Phi(x, y), \\ \Phi(x+\alpha', y+\beta') = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2\pi i}y+c'}\,\Phi(x, y), \end{cases}$$

où n, a, b, a', b' sont des entiers, les périodes étant liées par la relation (29),

$$(29)\qquad a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2\mathrm{N}i\pi.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que l'entier n est nul ou non, et nous montrerons que le second cas se ramène au premier.

Premier cas $u = 0$. — La fonction Φ admet alors les paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$. Les entiers a et b ne sont pas nuls tous deux, ni les entiers a' et b', comme nous venons de le voir. Soit δ le déterminant

$$\delta = ab' - ba'.$$

Il résulte des relations (32) que l'on a

$$\Phi(x + a'\alpha - a\alpha', y + a'\beta - a\beta') = e^{-\delta y + \varepsilon'}\Phi(x, y),$$
$$\Phi(x - b'\alpha + b\alpha', y - b'\beta + b\beta') = e^{-\delta x + \varepsilon}\Phi(x, y),$$

ε et ε' désignant des constantes. Ces relations montrent que δ ne peut pas être nul; car, autrement, $\Phi(x, y)$ serait une fonction entière admettant les groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$ et se reproduisant multipliée par une constante quand on ajoute à x et y le groupe de périodes

$$a'\alpha - a\alpha', \quad a'\beta - a\beta',$$

distinct des deux premiers, ce qui est impossible, comme nous l'avons vu ci-dessus (p. 195). Le déterminant δ n'étant pas nul, prenons pour nouvelles périodes les quantités

$$\mathrm{A} = b\alpha' - b'\alpha, \qquad \mathrm{B} = b\beta' - b'\beta,$$
$$\mathrm{A}' = a'\alpha - a\alpha' + 2\mathrm{N}i\pi, \qquad \mathrm{B}' = a'\beta - a\beta',$$

qui sont distinctes comme les périodes primitives, et nous aurons

$$\Phi(x + 2\pi i, y) = \Phi(x, y),$$
$$\Phi(x, y + 2\pi i) = \Phi(x, y),$$
$$\Phi(x + \mathrm{A}, y + \mathrm{B}) = e^{-\delta x + \varepsilon}\Phi(x, y),$$
$$\Phi(x + \mathrm{A}', y + \mathrm{B}') = e^{-\delta y + \varepsilon'}\Phi(x, y);$$

la relation (29) donnera, en outre,

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}',$$

ce qui montre que la fonction Φ s'exprime à l'aide des fonctions Θ.

Deuxième cas, n différent de zéro. — On ramène ce cas au précédent de la façon suivante. Les trois premières relations (32) donnent

$$\Phi(x+2\pi i, y) = \Phi(x, y),$$
$$\Phi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\Phi(x, y),$$
$$\Phi(x+\alpha, y+\beta) = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2\pi i}y+c}\Phi(x, y).$$

Donc, puisque n, a, b sont des entiers,

$$\Phi(x+n\alpha+2b\pi i, y+n\beta-2a\pi i) = e^{ly+k}\Phi(x, y),$$

où l et k désignent deux constantes dont la première a pour valeur

$$l = bn + \frac{n^2\alpha}{2i\pi}.$$

On trouve de même

$$\Phi(x+n\alpha'+2b'\pi i, y+n\beta'-2a'\pi i) = e^{l'y+k'}\Phi(x, y),$$

où

$$l' = b'n + \frac{n^2\alpha'}{2i\pi}.$$

Nous pouvons dire que la fonction $f(x, y)$, qui admet les quatre groupes de périodes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

admet aussi les groupes de périodes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha'_1, \beta'_1),$$

en posant

$$\alpha_1 = n\alpha + 2b\pi i, \qquad \beta_1 = n\beta - 2a\pi i,$$
$$\alpha'_1 = n\alpha' + 2b'\pi i, \qquad \beta'_1 = n\beta' - 2a'\pi i.$$

Ces nouvelles paires de périodes sont indépendantes comme les pre-

mières. Les relations (32) deviennent alors

$$\begin{aligned}
\Phi(x + 2\pi i, y) &= \Phi(x, y),\\
\Phi(x, y + 2\pi i) &= e^{nx}\Phi(x, y),\\
\Phi(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= e^{ly+k}\Phi(x, y),\\
\Phi(x + \alpha'_1, y + \beta'_1) &= e^{l'y+k'}\Phi(x, y)
\end{aligned}$$

et la relation (29) entre les périodes devient, si l'on y remplace α, β, α', β' par leurs expressions en fonction de α_1, β_1, α'_1, β'_1,

$$\begin{aligned}
n\alpha &= \alpha_1 - 2b\pi i, &\qquad n\alpha' &= \alpha'_1 - 2b'\pi i,\\
n\beta &= \beta_1 + 2a\pi i, &\qquad n\beta' &= \beta'_1 + 2a'\pi i,
\end{aligned}$$

$$(33)\qquad \frac{1}{2\pi i}(\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1) = 2Mi\pi,$$

M désignant un entier.

Il est évident que la période β_1 n'est pas nulle, car, si l'on avait $\beta_1 = 0$, il y aurait réduction pour les périodes : la fonction $f(x, y)$ serait doublement périodique par rapport à x seul. Si nous posons

$$\Phi_1(x, y) = e^{\lambda y^2 + \mu y}\Phi(x, y),$$

nous pourrons déterminer les constantes λ et μ de façon que $\Phi_1(x, y)$ admette le groupe de périodes α_1, β_1. Nous aurons

$$\lambda = -\frac{l}{2\beta_1} = -\frac{n}{4i\pi}\frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

puisque

$$l = bn + \frac{n^2\alpha}{2i\pi} = \frac{n\alpha_1}{2i\pi}.$$

La fonction Φ_1 vérifie alors les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x + 2\pi i, y) &= \Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x, y + 2\pi i) &= e^{nx + 4\pi i\lambda y + c_1}\Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= \Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x + \alpha'_1, y + \beta'_1) &= e^{(l' + 2\lambda\beta'_1)y + c'_1}\Phi_1(x, y).
\end{aligned}$$

c_1 et c'_1 désignant des constantes. Dans ces relations, on a

$$4\pi i\lambda = -n\frac{\alpha_1}{\beta_1},$$
$$l + 2\lambda\beta'_1 = \frac{n\alpha'_1}{2i\pi} - \frac{n\alpha_1\beta'_1}{2i\pi\beta_1} = \frac{2Mni\pi}{\beta_1},$$

en vertu de la relation (33). L'entier M qui figure dans cette relation (33) ne peut pas être nul, sans quoi le déterminant des périodes

$$\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1$$

serait nul et il y aurait réduction dans les périodes (*voir* n° 14). Nous écrirons alors les relations ci-dessus que vérifie la fonction Φ_1 sous la forme définitive suivante, où nous prenons comme deuxième groupe de périodes $(0, 2M\pi i)$ au lieu de $(0, 2\pi i)$,

$$\Phi_1(x + 2\pi i, y) \quad = \Phi_1(x, y),$$
$$\Phi_1(x, y + 2M\pi i) = e^{Mn\left(x - \frac{\alpha_1}{\beta_1}y\right) + C}\,\Phi_1(x, y),$$
$$\Phi_1(x + \alpha_1, y + \beta_1) = \Phi_1(x, y),$$
$$\Phi_1(x + \alpha'_1, y + \beta'_1) = e^{2Mni\pi\frac{y}{\beta_1} + C'}\,\Phi_1(x, y),$$

C et C′ étant des constantes.

Faisons enfin un changement linéaire de variables, en posant

$$X = x - \frac{\alpha_1}{\beta_1}y, \qquad Y = \frac{2\pi i}{\beta_1}y,$$
$$\Phi_1(x, y) = \Phi_2(X, Y).$$

Les paires de périodes de X et Y correspondant aux paires de périodes de x et y seront données par le Tableau suivant :

Périodes de x et y.	Périodes de X et Y.
$(2\pi i, 0)$	$(2\pi i, 0)$
$(0, 2M\pi i)$	(A, B)
(α_1, β_1)	$(0, 2\pi i)$
(α'_1, β'_1)	(A', B')

où l'on a posé

$$A = -2M\pi i \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad B = -\frac{4\pi^2 M}{\beta_1},$$

$$A' = \frac{\beta_1 \alpha'_1 - \alpha_1 \beta'_1}{\beta_1}, \qquad B' = \frac{2\pi i \beta'_1}{\beta_1}.$$

On aura alors

$$\Phi_2(X + 2\pi i, Y) = \Phi_2(X, Y),$$
$$\Phi_2(X, Y + 2\pi i) = \Phi_2(X, Y),$$
$$\Phi_2(X + A, Y + B) = e^{MnX + C}\Phi_2(X, Y),$$
$$\Phi_2(X + A', Y + B') = e^{MnY + C'}\Phi_2(X, Y),$$

et la relation (33) donne

$$B = A' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On retrouve donc, dans les deux cas, $n = 0$ ou $n \gtrless 0$, les équations caractéristiques des fonctions Θ, fournissant immédiatement ces fonctions par la méthode des coefficients indéterminés. La fonction $\Psi(x, y)$ pouvant s'exprimer de la même façon, on arrive à ce théorème que la fonction $f(x, y)$ est le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions Θ de deux variables.

14. *Remarques sur les périodes* (¹). — Soit $f(x, y)$ une fonction uniforme admettant les quatre paires de périodes indépendantes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

de telle façon que l'on ait

$$f(x + 2h\pi i + m\alpha + m'\alpha', y + 2k\pi i + m\beta + m'\beta') = f(x, y).$$

quels que soient les nombres entiers h, k, m et m'.

1° Il est impossible qu'il y ait une relation de la forme

$$(34) \qquad 2k\pi i + m\beta + m'\beta' = 0,$$

(¹) *Voir* les recherches de M. Kronecker, *Sur les systèmes de périodes*.

k, m, m' désignant des entiers. En effet, dans cette hypothèse, la quantité

$$\omega = 2h\pi i + m\alpha + m'\alpha'$$

n'est pas nulle en même temps pour une détermination convenable de l'entier h, et l'on ne peut pas avoir, d'une façon plus générale,

$$(35) \qquad 2M\pi i + N\omega = 0,$$

M et N étant des entiers; car, si une telle relation avait lieu, on aurait, d'après la valeur de ω,

$$2Pi\pi + mN\alpha + mN\alpha' = 0 \qquad (\text{P entier})$$

et, d'après (34),

$$2Nki\pi + mN\beta + mN\beta' = 0;$$

les paires de périodes ne seraient donc pas indépendantes, comme on l'a supposé. Puisque $2\pi i$ et ω ne sont liés par aucune relation de la forme (35) et que l'on a évidemment

$$f(x + 2\pi i, y) = f(x, y), \qquad f(x + \omega, y) = f(x, y),$$

on voit que la fonction f admet, par rapport à x *seul*, les deux périodes indépendantes $2\pi i$ et ω; il y a donc réduction et f est une fonction doublement périodique par rapport à x seul : ce qui est un cas que nous écartons.

2° Il est impossible, sauf dans des cas de réduction analogues au précédent, qu'il existe une relation de la forme

$$(36) \qquad 2k'\pi i + p'\alpha + q'\beta = 0,$$

k', p', q' désignant des entiers. En effet, faisons le changement linéaire de variables,

$$X = \frac{px + qy}{d}, \qquad Y = \frac{p'x + q'y}{d},$$

p et q désignant deux entiers et d le déterminant $pq' - qp'$, qui est différent de zéro pour un choix convenable de p et q. On tire de ces

formules

$$x = q'X - qY, \qquad y = -p'X + pY;$$

la fonction $f(x, y)$ devient une fonction $F(X, Y)$ de X et Y, et les formules de transformation montrent que $F(X, Y)$ admet les quatre paires de périodes suivantes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (A, B), \quad (A', B'),$$

où

$$A = \frac{p\alpha + q\beta}{d}, \qquad B = \frac{p'\alpha + q'\beta}{d},$$

$$A' = \frac{p\alpha' + q\beta'}{d}, \qquad B' = \frac{p'\alpha' + q'\beta'}{d},$$

qui sont indépendantes en même temps que les premières. Mais maintenant la relation supposée (36) devient

$$2k'd\pi i + B = 0,$$

cette relation rentre dans la forme (34), où $k = k'd$, $m = 1$, $m' = 0$. Elle est donc impossible si l'on écarte les cas de réduction.

3° Il est impossible que le déterminant

$$\delta = \alpha\beta' - \beta\alpha'$$

soit nul. On le voit en faisant le changement de variables

$$X = x - \frac{\alpha}{\beta}y, \qquad Y = \frac{2\pi i}{\beta}y.$$

Les paires de périodes de X et Y seront

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (A, B), \quad (A', B'),$$

où

$$A = -\frac{\delta}{\beta}, \qquad B = 2\pi i\frac{\beta'}{\beta}, \qquad A' = -2\pi i\frac{\alpha}{\beta}, \qquad B' = -\frac{4\pi^2}{\beta};$$

et si δ était nul, la période A le serait.

4° Enfin, et c'est là un théorème fondamental sur lequel nous nous sommes appuyé (n° **12**), *il est impossible qu'il existe des entiers p et q tels que l'on ait à la fois*

$$|e^{p\alpha+q\beta}-1|<\varepsilon, \qquad |e^{p\alpha'+q\beta'}-1|<\varepsilon,$$

ε *étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.*

D'après ce qui précède, aucune des quantités

$$e^{p\alpha+q\beta}-1, \quad e^{p\alpha'+q\beta'}-1$$

ne peut être nulle si p et q sont des entiers différents de zéro : nous voulons montrer que ces deux quantités ne peuvent pas être simultanément infiniment petites.

Mettons en évidence les parties réelles et les parties imaginaires de α, β, α', β' en posant

$$\alpha = a + ia_1, \qquad \beta = b + ib_1,$$
$$\alpha' = a' + ia'_1, \qquad \beta' = b' + ib'_1.$$

Nous distinguerons deux cas suivant que la quantité $ab' - ba'$ est différente de zéro ou non.

Premier cas : *$ab' - ba'$ différent de zéro.* — Si le module de

$$e^{p\alpha+q\beta}-1$$

diffère infiniment peu de zéro, le module de $e^{p\alpha+q\beta}$, c'est-à-dire

$$e^{pa+qb},$$

diffère infiniment peu de l'unité, et l'on a

$$|pa+qb|<\eta,$$

η étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut. Or il est impossible qu'on ait en même temps

$$|pa'+qb'|<\eta,$$

car on déduirait de là, en multipliant par $|b|$ et $|b'|$ et retranchant

$$|p(ab' - ba')| < \tau_1(|b| + |b'|),$$
$$|ab' - ba'| < \tau_1 \frac{|b| + |b'|}{|p|},$$

car, p et q étant deux entiers non nuls tous deux, nous pouvons supposer p différent de zéro. Cette dernière inégalité est impossible, puisque la constante $ab' - ba'$ n'est pas nulle et que le second membre de l'inégalité peut devenir aussi petit qu'on le veut, à cause du facteur τ_1.

Le théorème est donc démontré pour ce cas.

Deuxième cas : $ab' - ba' = 0$. Dans ce cas, nous commencerons par montrer qu'on peut transformer la fonction quadruplement périodique en une autre dans laquelle les premières périodes de toutes les quatre paires de périodes sont *purement imaginaires*. En effet, si a et a' sont nuls tous deux, il n'y a pas de transformation à faire; les premières périodes des quatre paires

$$(2\pi i, 0),\ (0, 2\pi i),\ (\alpha, \beta),\ (\alpha', \beta')$$

sont purement imaginaires, puisque a et a' sont les parties réelles de α et α'. Si a et a' ne sont pas nuls tous deux, supposons a différent de zéro et faisons :

$$X = ay - bx, \qquad Y = cy - dx,$$

c et d étant des constantes telles que $ad - bc$ soit différent de zéro. Les quatre paires de périodes seront:

$$\text{Pour } X \ldots\ldots\ldots \quad -2b\pi i,\ 2a\pi i,\ a\beta - b\alpha,\ a\beta' - b\alpha',$$
$$\text{Pour } Y \ldots\ldots\ldots \quad -2d\pi i,\ 2c\pi i,\ c\beta - d\alpha,\ c\beta' - d\alpha'.$$

Les périodes relatives à X sont toutes les quatre *purement imaginaires*, puisque

$$a\beta - b\alpha = i(ab_1 - ba_1), \qquad a\beta' - b\alpha' = i(ab'_1 - ba'_1).$$

Ainsi l'on peut ramener la fonction donnée à une fonction de X et Y,

de telle façon que les périodes relatives à X soient *purement imaginaires*. Désignons, pour abréger, ces périodes relatives à X par

$$iA_1,\ iA_2,\ iA_3,\ iA_4,$$

et les périodes correspondantes de Y par

$$B_1 + iC_1,\ B_2 + iC_2,\ B_3 + iC_3,\ B_4 + iC_4,$$

en mettant en évidence les parties réelles et les parties imaginaires. La fonction de X et Y ne change pas quand on ajoute respectivement à X et à Y les quantités

$$(37)\qquad \begin{cases} i(m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + m_4 A_4), \\ m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 + m_4 B_4 \\ \quad + i(m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 + m_4 C_4), \end{cases}$$

m_1, m_2, m_3, m_4 désignant des nombres entiers quelconques. Ces quantités (37) ne peuvent pas être nulles simultanément, sans quoi il y aurait réduction dans le nombre des paires de périodes. Mais on pourra toujours déterminer les entiers m_1, m_2, m_3, m_4 de façon à rendre ces deux quantités infiniment petites. En effet, ε étant un nombre positif donné d'avance, si petit soit-il, on pourra trouver des entiers m_1, m_2, m_3, m_4, tels que

$$(38)\qquad \begin{cases} |m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + m_4 A_4| < \varepsilon, \\ |m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 + m_4 B_4| < \varepsilon, \\ |m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 + m_4 C_4| < \varepsilon. \end{cases}$$

C'est là une proposition bien connue depuis Jacobi, dont nous indiquons sommairement la démonstration d'après Riemann. On en conclut que la fonction de X et Y admettrait une paire de périodes (38) plus petite que toute quantité donnée, ce qui est impossible. Il est donc également impossible que la quantité $(ab' - ba')$ soit nulle. Notre théorème se trouve donc complètement démontré.

15. Pour démontrer que les inégalités (38) ont lieu quelque petit que soit ε, il suffit de reprendre un raisonnement de Riemann dans l'article intitulé : *Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als 2n-fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist* (*Œuvres complètes*, p. 276, ou *Journal de Crelle*, t. 71).

Prenons un système d'axes Ox, Oy, Oz et considérons le parallélépipède construit sur les trois segments partant de l'origine et ayant pour projections sur Ox, Oy, Oz les quantités (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_3); nous appellerons ce parallélépipède le parallélépipède *élémentaire*. Les coordonnées des points situés à l'intérieur de ce parallélépipède sont définies par les équations

$$x = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3,$$
$$y = B_1\xi_1 + B_2\xi_2 + B_3\xi_3,$$
$$z = C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3\xi_3,$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont des quantités positives, telles que

$$0 \leq \xi_1 < 1, \qquad 0 \leq \xi_2 < 1, \qquad 0 \leq \xi_3 < 1.$$

A tout point pris dans l'intérieur du parallélépipède élémentaire correspond un seul système de valeurs de ξ_1, ξ_2, ξ_3, et réciproquement. Si nous concevons le réseau des parallélépipèdes, égaux au parallélépipède élémentaire, ayant pour sommets les points

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3, \\ y_\nu &= m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3, \\ z_\nu &= m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3, \end{aligned}\right\} \quad (m_1, m_2, m_3 \text{ entiers}),$$

ce réseau remplira tout l'espace. Considérons les points ayant pour coordonnées

$$X = m_4 A_4, \qquad Y = m_4 B_4, \qquad Z = m_4 C_4,$$

m_4 étant un entier quelconque. Chacun de ces points appartiendra à un des parallélépipèdes du réseau et, à ce point, correspondra, dans le

parallélépipède élémentaire, un point homologue x, y, z caractérisé par les trois nombres ξ_1, ξ_2, ξ_3, de telle façon que l'on ait

$$x - X = x_\nu, \qquad y - Y = y_\nu, \qquad z - Z = z_\nu.$$

Ces points sont tous distincts; car, si deux points x, y, z correspondant à des valeurs différentes m'_4 et m''_4 de l'entier m_4 coïncidaient, on aurait, en appelant également $m'_1, m'_2, m'_3, m''_1, m''_2, m''_3$ les valeurs correspondantes des entiers m_1, m_2, m_3,

$$m'_1 A_1 + m'_2 A_2 + m'_3 A_3 + m'_4 A_4 = m''_1 A_1 + m''_2 A_2 + m''_3 A_3 + m''_4 A_4,$$
. . . .

c'est-à-dire en posant $M_k = m'_k - m''_k$,

$$\sum_1^4 M_k A_k = 0, \qquad \sum_1^4 M_k B_k = 0, \qquad \sum_1^4 M_k C_k = 0;$$

il y aurait alors réduction entre les quatre groupes de périodes

$$(i A_k, B_k + i C_k)$$

qui se réduiraient à trois.

Divisons les arêtes du parallélépipède élémentaire en n parties égales et par les points de division menons des plans parallèles aux faces : nous partagerons ainsi le parallélépipède en n^3 parallélépipèdes; les valeurs de ξ_1, ξ_2, ξ_3 correspondant aux points intérieurs à l'un de ces nouveaux parallélépipèdes sont données par les inégalités

$$(39) \quad \frac{p_1}{n} \leqq \xi_1 < \frac{p_1 + 1}{n}, \qquad \frac{p_2}{n} \leqq \xi_2 < \frac{p_2 + 1}{n}, \qquad \frac{p_3}{n} \leqq \xi_3 < \frac{p_3 + 1}{n},$$

où p_1, p_2, p_3 sont des entiers positifs ou nuls, inférieurs à n.

Comme les points x, y, z du parallélépipède élémentaire, homologues des points

$$X = m_4 A_4, \qquad Y = m_4 B_4, \qquad Z = m_4 C_4,$$

sont tous distincts et sont en nombre indéfiniment croissant, on pourra

prendre m_4 assez grand pour qu'il y ait au moins deux de ces points x, y, z à l'intérieur d'un des n^3 petits parallélépipèdes définis par les inégalités (39). Appelons ces points x', y', z' et x'', y'', z'', en supposant qu'ils correspondent aux valeurs m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 et $m''_1, m''_2, m''_3, m''_4$ des entiers m_1, m_2, m_3, m_4 et aux valeurs $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ des paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3. On aura

$$x' - x'' = A_1(\xi'_1 - \xi''_1) + A_2(\xi'_2 - \xi''_2) + A_3(\xi'_3 - \xi''_3),$$

où, d'après les inégalités (39) appliquées à $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$,

$$|\xi'_1 - \xi''_1| < \frac{1}{n}, \qquad |\xi'_2 - \xi''_2| < \frac{1}{n}, \qquad (\xi'_3 - \xi''_3) < \frac{1}{n};$$

on a donc

$$|x' - x''| < \frac{|A_1| + |A_2| + |A_3|}{n}$$

et, en posant $m_k = m'_k - m''_k$,

$$|m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + m_4 A_4| < \frac{|A_1| + |A_2| + |A_3|}{n}.$$

De même

$$|m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 + m_4 B_4| < \frac{|B_1| + |B_2| + |B_3|}{n},$$

$$|m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 + m_4 C_4| < \frac{|C_1| + |C_2| + |C_3|}{n}.$$

Comme n peut être pris aussi grand qu'on le veut, les inégalités (38) sont démontrées.

16. Nous allons maintenant établir l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables, sans singularités essentielles, admettant quatre paires de périodes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta').$$

Soient

$$f_1(x, y) = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)}, \qquad f_2(x, y) = \frac{\varphi_2(x, y)}{\psi_2(x, y)}, \qquad f_3(x, y) = \frac{\varphi_3(x, y)}{\psi_3(x, y)}$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ étant des fonctions entières vérifiant des relations de la forme (32), ce qu'on peut toujours supposer, comme nous l'avons montré. On aura

$$\frac{\varphi_k(x+2\pi i, y)}{\varphi_k(x, y)} = \frac{\psi_k(x+2\pi i, y)}{\psi_k(x, y)} = 1,$$

$$\frac{\varphi_k(x, y+2\pi i)}{\varphi_k(x, y)} = \frac{\psi_k(x, y+2\pi i)}{\psi_k(x, y)} = e^{n_k x},$$

$$\frac{\varphi_k(x+\alpha, y+\beta)}{\varphi_k(x, y)} = \frac{\psi_k(x+\alpha, y+\beta)}{\psi_k(x, y)} = e^{a_k x + b_k y + n_k \frac{\alpha y}{2\pi i} + c_k}.$$

$$\frac{\varphi_k(x+\alpha', y+\beta')}{\varphi_k(x, y)} = \frac{\psi_k(x+\alpha', y+\beta')}{\psi_k(x, y)} = e^{a'_k x + b'_k y + n_k \frac{\alpha' y}{2\pi i} + c'_k},$$

où l'on fait successivement

$$k = 1, 2, 3,$$

les lettres a_k, b_k, a'_k, b'_k désignant des entiers.

Si donc nous posons

$$\Phi_1(x, y) = \varphi_1 \psi_2 \psi_3, \qquad \Phi_2(x, y) = \varphi_2 \psi_3 \psi_1,$$
$$\Phi_3(x, y) = \varphi_3 \psi_1 \psi_2, \qquad \Psi(x, y) = \psi_1 \psi_2 \psi_3,$$

nous aurons, en ramenant les expressions f_1, f_2, f_3 à avoir le même dénominateur,

$$f_1(x, y) = \frac{\Phi_1(x, y)}{\Psi(x, y)}, \qquad f_2(x, y) = \frac{\Phi_2(x, y)}{\Psi(x, y)}, \qquad f_3(x, y) = \frac{\Phi_3(x, y)}{\Psi(x, y)},$$

les quatre fonctions Φ_1, Φ_2, Φ_3, Ψ vérifiant *les mêmes relations*

$$\frac{\Phi_k(x+2\pi i, y)}{\Phi_k(x, y)} = \frac{\Psi(x+2\pi i, y)}{\Psi(x, y)} = 1,$$

$$\frac{\Phi_k(x, y+2\pi i)}{\Phi_k(x, y)} = \frac{\Psi(x, y+2\pi i)}{\Psi(x, y)} = e^{nx},$$

$$\frac{\Phi_k(x+\alpha, y+\beta)}{\Phi_k(x, y)} = \frac{\Psi(x+\alpha, y+\beta)}{\Psi(x, y)} = e^{ax + by + \frac{n\alpha y}{2\pi i} y + c},$$

$$\frac{\Phi_k(x+\alpha', y+\beta')}{\Phi_k(x, y)} = \frac{\Psi(x+\alpha', y+\beta')}{\Psi(x, y)} = e^{a'x + b'y + \frac{n\alpha' y}{2\pi i} y + c'},$$

où $k = 1, 2, 3,$

$$n = n_1 + n_2 + n_3, \qquad a = a_1 + \alpha_2 + a_3, \qquad b = b_1 + b_2 + b_3,$$
$$a' = a'_1 + a'_2 + a'_3, \qquad b' = b'_1 + b'_2 + b'_3,$$
$$c = c_1 + c_2 + c_3, \qquad c' = c'_1 + c'_2 + c'_3.$$

Si, dans la troisième de ces relations, on change x et y en $x + \alpha'$ et $y + \beta'$, et si, dans la quatrième, on change x et y en $x + \alpha$, $y + \beta$, on a de plus la relation

$$a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2N i\pi \qquad (N \text{ entier}),$$

identique à la relation (29).

Appliquant alors la suite des transformations que nous avons faites aux pages 195 et suivantes, on ramènera les fonctions f_1, f_2, f_3 à dépendre de deux nouvelles variables X et Y liées linéairement à X et Y, de telle façon que l'on ait

$$f_1(X, Y) = \frac{\Theta_1(X, Y)}{\Theta_0(X, Y)}, \qquad f_2(X, Y) = \frac{\Theta_2(X, Y)}{\Theta_0(X, Y)},$$
$$f_3(X, Y) = \frac{\Theta_3(X, Y)}{\Theta_0(X, Y)},$$

les fonctions Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3 vérifiant les relations

$$\Theta_k(X + 2\pi i, Y) = \Theta_k(X, Y + 2\pi i) = \Theta_k(X, Y),$$
$$\Theta_k(X + A, Y + B) = e^{-pX+C}\,\Theta_k(X, Y),$$
$$\Theta_k(X + A', Y + B') = e^{-pY+C'}\,\Theta_k(X, Y),$$

où $k = 0, 1, 2, 3$; p désignant un entier, C et C' des constantes, et les périodes vérifiant la condition de Riemann,

$$A' = B.$$

Le déterminant

$$AB' - BA' = AB' - B^2$$

ne peut pas être nul, comme nous l'avons vu dans le n° **14**. En employant la méthode des coefficients indéterminés pour développer la fonction Θ_k par la formule de Fourier en séries ordonnées suivant les puissances positives et négatives de e^{x} et e^{y}, on reconnaît immédiatement que, pour la convergence, la partie réelle de

$$AB' - B^2$$

doit être *positive*. Quant à l'entier p, il sera positif ou négatif suivant que la partie réelle de A est négative ou positive. On voit, de plus, que la fonction entière la plus générale, vérifiant les mêmes relations que les quatre fonctions Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, est donnée par une expression linéaire à coefficients constants de p^2 fonctions spéciales vérifiant séparément ces mêmes relations.

Cela posé, formons toutes les combinaisons homogènes d'un même degré positif q des fonctions Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, c'est-à-dire les expressions de la forme

$$\Theta_0^{\alpha_0}\Theta_1^{\alpha_1}\Theta_2^{\alpha_2}\Theta_3^{\alpha_3},$$

α_0, α_1, α_2, α_3 étant des entiers positifs ou nuls tels que

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = q.$$

Ces combinaisons sont au nombre de

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6};$$

elles vérifient des relations identiques à celles que vérifient les fonctions Θ_k, avec cette seule différence que p, C et C' sont remplacés par qp, qC et qC'. Chacune des

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6}$$

combinaisons homogènes considérées s'exprime donc linéairement à l'aide de

$$q^2p^2$$

fonctions spéciales. Choisissons q assez grand pour que

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6} > q^2 p^2.$$

On pourra alors éliminer les q^2p^2 fonctions spéciales entre les

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6}$$

relations donnant les combinaisons homogènes

$$\Theta_0^{\alpha_0}\Theta_1^{\alpha_1}\Theta_2^{\alpha_2}\Theta_3^{\alpha_3},$$

et l'on obtiendra ainsi, entre ces combinaisons, au moins une relation linéaire à coefficients constants, qui, divisée par le facteur Θ_0^q, donnera *une relation algébrique* entre les fonctions considérées f_1, f_2, f_3. Il pourra se faire que l'on obtienne ainsi plusieurs relations entre ces fonctions : il est évident que deux d'entre elles *au plus* pourront être distinctes.

17. *Sur les fonctions de deux variables à deux paires de périodes.* — Nous avons vu (n° **10**) qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie peut toujours être mise sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières ne s'annulant simultanément qu'aux points d'indétermination de $f(x, y)$ et vérifiant les deux relations

$$(40)\quad \begin{cases} \varphi(x+2\pi i, y) = \varphi(x, y), & \varphi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y), \\ \psi(x+2\pi i, y) = \psi(x, y), & \psi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\psi(x, y), \end{cases}$$

où n désigne un entier.

Si cet entier n est nul, les fonctions entières φ et ψ admettant séparément la période $2\pi i$ par rapport à x et y sont données par des séries convergentes de la forme

$$\varphi(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{p,a=+\infty} \mathrm{A}_{p,q}\, e^{px+qy},$$

$$\psi(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{p,p=+\infty} \mathrm{B}_{p,q}\, e^{px+qy},$$

dont les coefficients $\mathrm{A}_{p,q}$ et $\mathrm{B}_{p,q}$ sont indépendants de x et y.

Si n est différent de zéro, il est aisé d'obtenir l'expression générale des fonctions φ et ψ. Tout d'abord la fonction φ, admettant la période $2i\pi$ par rapport à x, sera donnée par la formule de Fourier

$$\varphi(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} g_\nu(y)\, e^{-\nu x},$$

les coefficients $g_\nu(y)$ étant des fonctions entières de y. En exprimant que

$$\varphi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y),$$

on trouve

$$g_\nu(y + 2\pi i) = g_{\nu+n}(y),$$

d'où, k désignant un entier quelconque,

$$g_{\nu+nk}(y) = g_\nu(y + 2k\pi i).$$

Cette relation permet d'exprimer toutes les fonctions $g_\nu(y)$ à l'aide de $\pm n$ d'entre elles, par exemple, si n est positif, de

$$g_0(y), \quad g_1(y), \quad g_2(y), \quad \ldots, \quad g_{n-1}(y),$$

et, si n est négatif, de

$$g_0(y), \quad g_1(y), \quad g_2(y), \quad \ldots, \quad g_{-n-1}(y).$$

En posant

$$\varphi_\mu(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} g_\mu(y + 2k\pi i)\, e^{(\mu+nk)x},$$

où μ est un des nombres 0, 1, 2, ... $\pm n - 1$, on aura

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) + \ldots + \varphi_{\pm n-1}(x, y)$$

avec $\pm n$ fonctions entières arbitraires. On aura une expression analogue pour $\psi(x, y)$.

Remarquons maintenant que, si l'on fait

$$\varphi_1(x, y) = e^{-\frac{nxy}{2\pi i}} \varphi(x, y),$$

$$\psi_1(x, y) = e^{-\frac{nxy}{2\pi i}} \psi(x, y),$$

on aura

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)},$$

les fonctions φ_1 et ψ_1 vérifiant les deux relations

$$(41)\quad \begin{cases} \varphi_1(x + 2\pi i, y) = e^{-ny}\varphi_1(x, y), & \varphi_1(x, y + 2\pi i) = \varphi_1(x, y), \\ \psi_1(x + 2\pi i, y) = e^{-ny}\psi_1(x, y), & \psi_1(x, y + 2\pi i) = \psi_1(x, y). \end{cases}$$

Ces nouvelles fonctions φ_1 et ψ_1 s'expriment donc par des séries analogues aux précédentes, mais dans lesquelles x joue le rôle de y et y celui de x.

Supposons, pour traiter un cas particulier précis, $n = 1$, et désignons par $P(y)$ et $Q(y)$ deux polynômes de degrés pairs,

$$P(y) = a_0 y^{2p} + a_1 y^{2p-1} + \ldots + a_{2p},$$

$$Q(y) = b_0 y^{2q} + b_1 y^{2q-1} + \ldots + b_{2q},$$

dans lesquels les parties réelles des produits

$$a_0 i^{2p}, \quad b_0 i^{2q}$$

sont *négatives*. Les fonctions entières

$$\varphi(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{P(y+2\nu\pi i)-\nu x},$$

$$\psi(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{Q(y+2\nu\pi i)-\nu x}$$

vérifient les relations (40) avec $n = 1$.

Les fonctions

$$\varphi_1(x, y) = e^{-\frac{xy}{2\pi i}}\varphi(x, y), \qquad \psi_1(x, y) = e^{-\frac{xy}{2\pi i}}\psi(x, y)$$

vérifient alors les relations (41), où $n = 1$. Elles sont données, l'une et l'autre, par des séries de la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} h(x + 2\nu\pi i)e^{\nu y},$$

$h(x)$ étant une fonction entière. Pour $\varphi_1(x, y)$, on a

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi i} e^{-\frac{xy}{2i\pi}}\varphi(x, y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_0^{2\pi i} e^{P(y+2\nu\pi i)-\frac{x}{2\pi i}(y+2\nu\pi i)}\,dy$$

ou, enfin,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{P(y)-\frac{x}{2\pi i}y}\,dy,$$

l'intégration étant faite par des valeurs purement imaginaires de y. Pour les coefficients du développement de $\psi_1(x, y)$, on trouve une expression analogue, où $P(y)$ est remplacé par $Q(y)$.

Si les polynômes $P(y)$ et $Q(y)$ sont du second degré, on retrouve des fonctions θ d'une variable. Supposons, par exemple,

$$P(y) = \alpha y^2, \qquad Q(y) = \beta y^2,$$

α et β désignant des constantes réelles positives. Nous aurons alors

$$\varphi(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\alpha(y+2\nu\pi i)^2 - \nu x};$$

si donc nous posons

$$\theta_3(z \mid \omega, \omega') = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2\nu z + \nu^2 \omega')}$$

(Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*), nous aurons

$$\varphi(x, y) = e^{\alpha y^2} \theta_3\left(2\alpha y - \frac{x}{2\pi i} \,\middle|\, 1, 4\pi\alpha i\right):$$

$\psi(x, y)$ sera donné par la même formule où l'on change α en β. En outre, si l'on fait

$$\varphi_1(x, y) = e^{-\frac{xy}{2\pi i}} \varphi(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} h(x + 2\nu\pi i) e^{\nu y},$$

on a, d'après les formules générales ci-dessus,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\alpha y^2 - \frac{xy}{2i\pi}} dy,$$

ou, en changeant y en ui, u réel,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{x^2}{16\alpha\pi^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(u + \frac{x}{4\alpha\pi}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{\frac{x^2}{16\alpha\pi^2}}.$$

On a ainsi

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{(x+2\nu\pi i)^2}{16\alpha\pi^2} + \nu y},$$

ce qui est de nouveau une fonction θ. On aura de même $\psi_1(x, y)$ en changeant α en β. On réalise ainsi, comme nous l'avons démontré, *a priori*, sous deux formes différentes,

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)},$$

l'expression d'une fonction de x et y avec les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$. Dans cet exemple, les formules permettant de passer de la fonction φ à la fonction φ_1 et de ψ à ψ_1 sont les formules bien connues permettant d'exprimer en fonction l'une de l'autre les deux fonctions

$$\theta_3(x \mid \omega, \omega'), \qquad \theta_3(x \mid -\omega', \omega)$$

(*voir* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 264 et suivantes).

Pour terminer, revenons un instant au cas général. Nous avons démontré qu'une fonction $f(x, y)$, sans singularités essentielles à distance finie, avec les paires de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, peut s'écrire

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

les fonctions φ et ψ ne s'annulant en même temps qu'aux points où $f(x, y)$ est indéterminée et vérifiant les relations

$$\varphi(x + 2\pi i, y) = \varphi(x, y), \qquad \varphi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y),$$
$$\psi(x + 2\pi i, y) = \psi(x, y), \qquad \psi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\psi(x, y).$$

Or nous venons de voir, dans le dernier exemple traité, que la fonction

$$\theta(x, y) = e^{\alpha y^2}\theta_3\left(2\alpha y - \frac{x}{2\pi i}\,\middle|\, 1, 4\pi\alpha i\right) \qquad (\alpha > 0)$$

vérifie les deux relations

$$\theta(x + 2\pi i, y) = \theta(x, y), \qquad \theta(x, y + 2\pi i) = e^{x}\theta(x, y).$$

Si donc n est négatif, les fonctions

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\theta^{-n}(x, y), \qquad \Psi(x, y) = \psi(x, y)\theta^{-n}(x, y)$$

seront des *fonctions entières* admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$; si n est positif, il en est de même des deux fonc-

tions

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\theta''(-x, y), \qquad \Psi(x, y) = \psi(x, y)\theta''(-x, y).$$

Dans les deux cas, on pourra mettre la fonction $f(x, y)$ sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)}, \tag{42}$$

Φ et Ψ étant des fonctions entières admettant séparément les deux paires de périodes et développables, par conséquent, par la série de Fourier. On arrive ainsi à une expression analogue à celle des fonctions d'une variable avec une période, avec cette différence que l'expression (42) n'est pas irréductible, puisque le numérateur et le dénominateur sont divisibles par une même série entière $\theta^{\pm''}(\pm x, y)$, s'annulant à distance finie.

Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes (1);

PAR M. ALBERT RIBAUCOUR,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

CHAPITRE X.

DERNIÈRES PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX DE DROITES. CORRESPONDANCE DES LIGNES ISOTROPES SUR DEUX SURFACES.

92. *Faisceau de droites liées aux plans tangents de la surface* (O) *et normales à des surfaces quelle que soit la forme de* (O). — Nous avons vu que, si des droites rayonnent des différents points de (O) ou sont couchées dans ses plans tangents, les faisceaux qu'elles engendrent ne peuvent être normaux à des surfaces sans garder cette propriété, quelle que soit la forme de (O). Cherchons s'il existe d'autres faisceaux formés de droites liées individuellement à chaque plan tangent de (O), qui jouissent aussi de la même propriété.

Chaque droite D rencontre le plan tangent en un point M; prenons pour ligne OX la droite OM et considérons un réseau orthogonal (u, v) satisfaisant à cette condition. Si l'on porte sur D, à partir de M, une longueur variable R, l'extrémité du segment doit décrire une surface normale à D. Désignons par a, b, c les cosinus que D fait avec les trois axes instantanés et par l la distance OM; les coordonnées du point appartenant à la surface trajectoire sont

$$\xi = l + a\mathrm{R}, \qquad \eta = b\mathrm{R}, \qquad \zeta = c\mathrm{R}, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

(1) Voir même Tome, p. 5.

on doit avoir, manifestement,

$$a\,\Delta X + b\,\Delta Y + c\,\Delta Z = 0$$

quels que soient du et dv; les formules (F) donnent

$$a\left(f + \frac{dl}{du}\right) + \frac{dR}{du} - bl\,\frac{df}{g\,dv} - clP = 0,$$
$$a\,\frac{dl}{dv} + \frac{dR}{dv} + bg + bl\,\frac{dg}{f\,du} + clg\,D = 0;$$

telles sont les équations qui régissent le problème. On voit qu'elles sont indépendantes de la forme de (O) dans les deux cas où l est nul [c'est l'hypothèse des rayons issus des différents points de (O)], et dans celui où c est nul [c'est l'hypothèse des droites couchées dans les plans tangents de (O)].

Dans ces deux cas on obtient l'intégrale des surfaces trajectoires en résolvant les équations

$$\frac{dR}{du} = -\,af, \qquad \frac{dR}{dv} = -\,bg \qquad \text{pour } l = 0,$$
$$\left.\begin{aligned}\frac{dR}{du} &= -\,a\left(f + \frac{dl}{du}\right) + bl\,\frac{df}{g\,dv}\\ \frac{dR}{dv} &= -\,a\,\frac{dl}{dv} - b\left(g + l\,\frac{dg}{f\,du}\right)\end{aligned}\right\}\text{pour } c = 0;$$

mais celles-ci sont elles-mêmes indépendantes de la forme (O), de telle sorte que, non seulement le faisceau des droites est normal à des surfaces, mais encore que l'intégrale de ces surfaces ne dépend pas de la forme de (O).

Il peut se faire pourtant que la première propriété persiste sans la seconde, et c'est ce cas particulier que nous visons.

Dans cette hypothèse, il faut éliminer R des équations où il figure, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned}P\,\frac{d}{dv}(cl) + gD\,\frac{d}{du}(cl) + cl\left[\frac{dP}{dv} + \frac{d}{du}(gD)\right]&\\ + \frac{d}{dv}\left[bl\,\frac{df}{g\,dv} - a\left(f + \frac{dl}{du}\right)\right] + \frac{d}{du}\left[a\,\frac{dl}{dv} + b\left(g + \frac{l\,dg}{f\,du}\right)\right] &= 0,\end{aligned}$$

que l'on peut transformer, en vertu des équations (φ), ainsi

$$\mathrm{P}\frac{d}{dv}(cl) + \mathrm{Q}cl\frac{df}{g\,dv} - g\mathrm{D}\left[cl\frac{dg}{g\,du} - \frac{d}{du}(cl)\right]$$
$$+ \frac{d}{dv}\left[bl\frac{df}{g\,dv} - a\left(f + \frac{dl}{du}\right)\right] + \frac{d}{du}\left[a\frac{dl}{dv} + b\left(g + l\frac{dg}{f\,du}\right)\right] = 0;$$

mais puisque nous voulons que ceci ait lieu quelle que soit la forme de (O), il faut que

$$cl = \mathrm{U}, \qquad \frac{df}{g\,dv} = 0, \qquad \frac{dg}{g\,du} - \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}} = 0.$$

La surface (O) *est applicable sur une surface de révolution dont les lignes* (v) *sont les méridiennes.*

Le faisceau est déterminé par les trois équations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad cl = \mathrm{U},$$
$$\frac{d}{dv}\left[a\left(1 + \frac{dl}{du}\right)\right] = \frac{d}{du}\left[a\frac{dl}{dv} + b(\mathrm{U} + l\mathrm{U}')\right],$$

que l'on ramène à une relation différentielle en l et φ en posant

$$a\left(1 + \frac{dl}{du}\right) = \frac{d\varphi}{du},$$
$$a\frac{dl}{dv} + b(\mathrm{U} + l\mathrm{U}') = \frac{d\varphi}{dv}.$$

93. *Formule donnant les images principales d'un faisceau de droites quelconque.* — Il peut être utile dans certains cas de connaître les formules qui déterminent les images principales du faisceau de droites le plus général; la condition pour que ces images soient conjuguées présente une véritable simplicité, c'est pourquoi nous allons les déterminer, en supposant la plus grande généralité possible.

Soit R une droite dont les équations sont

$$\frac{\mathrm{X} - \xi}{a} = \frac{\mathrm{Y} - \eta}{b} = \mathrm{Z},$$

a et b n'ayant plus la même signification que dans l'article précédent; ξ et η sont les coordonnées instantanées du point où la droite perce le plan tangent en O.

Exprimons que si l'on suit le chemin $(du\,dv)$, les droites se rencontrent consécutivement. On aura, comme au n° **81**,

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{Z}\left[-du\left(f+\frac{d\xi}{du}+\eta\frac{df}{g\,dv}\right)+dv\left(-\frac{d\xi}{dv}+\eta\frac{dg}{f\,du}\right)\right]\\ \qquad -du\left(b\frac{d\xi}{g\,dv}+\mathrm{P}+\frac{da}{du}\right)+dv\left(b\frac{dg}{f\,du}+g\mathrm{D}-\frac{da}{dv}\right)\end{array}\right\}}{a}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{Z}\left[-dv\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\xi\frac{dg}{f\,du}\right)+du\left(-\frac{d\eta}{du}+\xi\frac{df}{g\,dv}\right)\right]\\ \qquad -dv\left(a\frac{dg}{f\,du}+\mathrm{Q}+\frac{db}{dv}\right)+du\left(a\frac{df}{g\,dv}+f\mathrm{D}-\frac{db}{du}\right)\end{array}\right\}}{b}$$

$$=\frac{1}{Z}[du(\mathrm{P}\xi-f\mathrm{D}\eta)+dv(\mathrm{Q}\eta-g\mathrm{D}\xi)]$$
$$+du(a\mathrm{P}-bf\mathrm{D})+dv(b\mathrm{Q}-ag\mathrm{D});$$

posons

$$\mathrm{M}=-\left(f+\frac{d\xi}{du}+\eta\frac{df}{g\,dv}\right),\qquad \mathrm{M}'=-\frac{d\eta}{du}+\xi\frac{df}{g\,dv},$$

$$\mathrm{N}=-\frac{d\xi}{dv}+\eta\frac{dg}{f\,du},\qquad \mathrm{N}'=-\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\xi\frac{dg}{f\,du}\right),$$

$$m=-\left(b\frac{df}{g\,dv}+\mathrm{P}+\frac{da}{du}\right),\qquad m'=a\frac{df}{g\,dv}+f\mathrm{D}-\frac{db}{du},$$

$$n=b\frac{dg}{f\,du}+g\mathrm{D}-\frac{da}{dv},\qquad n'=-\left(a\frac{dg}{f\,du}+\mathrm{Q}+\frac{db}{dv}\right),$$

$$\mathrm{R}=\mathrm{P}\xi-f\mathrm{D}\eta,\qquad r=\mathrm{P}a-f\mathrm{D}b,$$

$$\mathrm{S}=\mathrm{Q}\eta-g\mathrm{D}\xi;\qquad s=\mathrm{Q}b-g\mathrm{D}a;$$

$$\mu=b\frac{df}{g\,dv}+\frac{da}{du},$$

$$\mu'=a\frac{df}{g\,dv}-\frac{db}{du},$$

$$\nu=b\frac{dg}{f\,du}-\frac{da}{dv},$$

$$\nu'=a\frac{dg}{f\,du}+\frac{db}{dv}.$$

L'équation des images principales devient

$$du^2\left[\begin{matrix}\mathrm{M}(m'-br)\\ -\mathrm{M}'(m-ar)\end{matrix}+\mathrm{R}(bm-am')\right]+dv^2\left[\begin{matrix}\mathrm{N}(n'-bs)\\ -\mathrm{N}'(n-as)\end{matrix}+\mathrm{S}(bn-an')\right]$$
$$+du\,dv\left[\begin{matrix}\mathrm{M}(n'-bs)-\mathrm{M}'(n-as)\\ +\mathrm{N}(m'-br)-\mathrm{N}'(m-ar)\end{matrix}+\mathrm{R}(bn-an')+\mathrm{S}(bm-am')\right]=0.$$

La condition qui exprime que les images principales sont conjuguées est, ordonnée suivant les paramètres définissant la forme de (O),

$$-\mathrm{P}[f(\mathrm{N}\nu'+\mathrm{N}'\nu)+gb\xi(\mathrm{PQ}-fg\mathrm{D}^2)]+\mathrm{Q}[g(\mathrm{M}\mu'+\mathrm{M}'\mu)+fa\eta(\mathrm{PQ}-fg\mathrm{D}^2)]$$
$$+fg\mathrm{D}[(\mathrm{N}\mu'+\mathrm{N}'\mu)-(\mathrm{M}\nu'+\mathrm{M}'\nu)-(a\xi-b\eta)(\mathrm{PQ}-fg\mathrm{D}^2)]$$
$$+(\mathrm{PQ}-fg\mathrm{D}^2)[-ab(g\mathrm{M}+f\mathrm{N}')+(1+a^2)g\mathrm{M}'-g\xi(b\mu+a\mu')$$
$$-(1+b^2)f\mathrm{N}+f\eta(b\nu+a\nu')]=0.$$

Nous aurons l'occasion d'appliquer ces formules dans l'étude du mouvement d'un corps assujetti à quatre conditions.

94. *Deux surfaces se correspondent avec parallélisme des plans tangents. Dans quel cas les lignes isotropes se correspondent-elles? Deux systèmes.* — Nous avons annoncé, au n° **17**, que nous exposerions une généralisation de la correspondance qui existe entre la sphère et les surfaces à étendue minima; nous sommes à présent en mesure de l'établir. Le problème doit être ainsi posé : *On fait correspondre deux surfaces avec parallélisme des plans tangents, dans quelles conditions les lignes isotropes se correspondent-elles?*

Soient (O) et (N) les deux surfaces, ξ, η, ζ étant les coordonnées du point N; on a d'abord, en prenant pour (u, v) le réseau des lignes de courbure,

$$\xi=\frac{d\zeta}{\mathrm{P}\,du},\qquad \eta=\frac{d\zeta}{\mathrm{Q}\,dv};$$

on peut poser

$$\Delta\mathrm{X}=\mathrm{A}\,du+\mathrm{B}\,dv,\qquad \Delta\mathrm{Y}=\mathrm{B}'\,du+\mathrm{A}'\,dv,$$

où A, B, B′, A′ ont les valeurs

$$A = f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta + P\zeta, \qquad B = \frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta,$$

$$B' = \frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi, \qquad A' = g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi + Q\zeta.$$

Le dS^2 de (N) a pour expression

$$dS^2 = (A^2 + B'^2)\,du^2 + (B^2 + A'^2)\,dv^2 + 2(AB + A'B')\,du\,dv,$$

et, si les lignes isotropes se correspondent sur (N) et (O), on a

$$AB + A'B' = 0,$$

$$\frac{A^2 + B'^2}{f^2} = \frac{B^2 + A'^2}{g^2},$$

système que l'on peut écrire sous la forme

$$\left[\left(\frac{A}{f} + \frac{A'}{g}\right) + i\left(\frac{B}{g} - \frac{B'}{f}\right)\right]\left[\left(\frac{A}{f} - \frac{A'}{g}\right) + i\left(\frac{B}{g} + \frac{B'}{f}\right)\right] = 0,$$

$$\left[\left(\frac{A}{f} + \frac{A'}{g}\right) - i\left(\frac{B}{g} - \frac{B'}{f}\right)\right]\left[\left(\frac{A}{f} - \frac{A'}{g}\right) - i\left(\frac{B}{g} + \frac{B'}{f}\right)\right] = 0,$$

et si l'on se restreint aux transformations réelles, il faut que l'on ait l'un des systèmes de conditions que voici

$$\frac{A}{f} + \frac{A'}{g} = 0, \qquad \frac{B}{g} - \frac{B'}{f} = 0$$

ou

$$\frac{A}{f} - \frac{A'}{g} = 0, \qquad \frac{B}{g} + \frac{B'}{f} = 0,$$

à moins que les quatre premiers membres ne soient nuls à la fois; mais ce cas particulier ne peut être considéré parce qu'il conduit à prendre pour (N) un point fixe.

95. *Examen du premier système : les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes. Relation entre les rayons de courbure principaux; autre théorème sur la question.* — Examinons

d'abord le système de correspondance dans lequel

$$\frac{A}{f} + \frac{A'}{g} = 0, \qquad \frac{B}{g} - \frac{B'}{f} = 0.$$

Si l'on remplace ξ et η par leurs valeurs en ζ, on trouve

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g}{P}\frac{d\zeta}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{f}{Q}\frac{d\zeta}{dv}\right) + fg\left[2 + \zeta\left(\frac{P}{f} + \frac{Q}{g}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\frac{f}{P} - \frac{g}{Q}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{du\,dv} - \frac{d\zeta}{du}\frac{dP}{P\,dv} - \frac{d\zeta}{dv}\frac{dQ}{Q\,du}\right) = 0, \qquad \text{soit} \qquad B = B' = 0.$$

Le cas particulier de la sphère se met de lui-même en évidence.

Dans l'hypothèse où (O) est une sphère, la première équation n'est autre chose que l'équation différentielle des surfaces à étendue minima. Dans le cas général, on voit que les lignes de courbure de (N) et (O) se correspondent : c'est ce qui est exprimé par la seconde condition. La première équation a un sens géométrique très remarquable : puisque les lignes de courbure se correspondent, $A\,du$ et $A'\,dv$ sont les éléments de ces lignes correspondant respectivement à $f\,du$ et $g\,dv$. Désignons par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de (O) et par R'_1 et R'_2 ceux de (N); la première condition équivaut à la relation

$$\frac{R'_1}{R_1} + \frac{R'_2}{R_2} = 0.$$

Ainsi : *lorsque deux surfaces* (O) *et* (N) *se correspondent avec parallélisme des plans tangents et par leurs lignes isotropes : 1° elles ont même image sphérique; 2° la somme algébrique des quotients obtenus en divisant les rayons de courbure principaux de l'une par les rayons de courbure principaux de l'autre est nulle.*

On peut donner une autre interprétation géométrique à ce qui précède. Joignons les points N et O par une droite, celle-ci engendrera un faisceau; soient F_1 et F_2 les foyers. Il est clair que les lignes de courbure sont les traces principales de ce faisceau sur (O) et sur (N), mais on a

$$\frac{2}{ON} = \frac{1}{OF_1} + \frac{1}{OF_2}.$$

Ainsi, les foyers du faisceau sont harmoniques conjugués des deux points O et N.

96. *Deuxième système. Les surfaces dérivées sont homothétiques.* — Avant d'aller plus loin, il convient de se débarrasser du second cas, correspondant au système

$$\frac{A}{f} - \frac{A'}{g} = 0, \qquad \frac{B}{g} + \frac{B'}{f} = 0;$$

la seconde équation donne

$$\left(\frac{f}{P} + \frac{g}{Q}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{du\,dv} - \frac{d\zeta}{du}\frac{dP}{P\,dv} - \frac{d\zeta}{dv}\frac{dQ}{Q\,du}\right) = 0,$$

donc les lignes de courbure se correspondent encore; mais la première équation conduirait à

$$OF_1 = OF_2,$$

de telle sorte que les foyers du faisceau ON coïncident, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que (O) et (N) sont homothétiques. Il n'y a donc que le premier système qui puisse conduire à un résultat non évident.

97. *Équation du problème à l'aide de l'image sphérique.* — Puisqu'il y a deux équations différentielles qui régissent la question, il est visible que l'on ne peut pas prendre arbitrairement même l'une des surfaces. Donnons-nous l'image sphérique du couple (O) (N) et cherchons à le déterminer. Soient ζ et ζ' les distances du centre de la sphère de rayon unité. En général, on a pour les éléments des lignes de courbure

$$\Delta X = du\left[PZ + \frac{d}{du}\left(\frac{dZ}{P\,du}\right) + \frac{dP}{Q\,dv}\frac{dZ}{Q\,dv}\right] = A\,du,$$

$$\Delta Y = dv\left[QZ + \frac{d}{dv}\left(\frac{dZ}{Q\,dv}\right) + \frac{dQ}{P\,du}\frac{dZ}{P\,du}\right] = A'\,dv.$$

Les équations du problème sont donc

$$\frac{P\zeta + \frac{d}{du}\left(\frac{d\zeta}{P\,du}\right) + \frac{dP}{Q\,dv}\,\frac{d\zeta}{Q\,dv}}{P\zeta' + \frac{d}{du}\left(\frac{d\zeta'}{P\,du}\right) + \frac{dP}{P\,du}\,\frac{d\zeta'}{P\,dv}} + \frac{Q\zeta + \frac{d}{dv}\left(\frac{d\zeta}{Q\,dv}\right) + \frac{dQ}{P\,du}\,\frac{d\zeta}{P\,du}}{Q\zeta' + \frac{d}{dv}\left(\frac{d\zeta'}{Q\,dv}\right) + \frac{dQ}{P\,du}\,\frac{d\zeta'}{P\,du}} = 0,$$

$$PQ + \frac{d}{du}\left(\frac{dQ}{P\,du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{dP}{Q\,dv}\right) = 0;$$

de plus, ζ et ζ' sont des solutions de l'équation (16).

98. *Réduction des équations du problème à des formes connues.* — Nous n'avons pu résoudre le problème complètement, il semble offrir une véritable résistance; mais, avant d'abandonner le sujet, il convient de faire remarquer que l'on peut toujours prendre pour (N) un point fixe, de telle sorte que le ζ d'un point satisfait aux équations du n° **95**. On peut profiter de cette remarque pour réduire un peu le problème. Si, en effet, au lieu de ζ nous prenons pour variable la distance p d'un point fixe aux plans tangents de (N), il viendra

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2p}{du\,dv} - \frac{dp}{du}\,\frac{dP}{P\,dv} + \frac{dp}{dv}\,\frac{dQ}{Q\,du},\\ &\frac{d}{du}\left(\frac{g}{P}\,\frac{dp}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{f}{Q}\,\frac{dp}{dv}\right) + fgp\left(\frac{P}{f} + \frac{Q}{g}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

et l'on voit que le terme indépendant a disparu. Mais cette dernière équation, ainsi réduite, n'est autre chose que l'équation déterminant les couples de surfaces applicables l'une sur l'autre, ainsi que nous le verrons plus loin. Nous aurons donc à faire, à propos de cette théorie, des rapprochements avec la question que nous venons de traiter.

CHAPITRE XI.

Théorie des systèmes cycliques.

99. *Définition des systèmes cycliques résultant du théorème de Dupin et des intégrales trouvées précédemment.* — Il résulte du

théorème de Ch. Dupin sur les faisceaux de droites symétriques par rapport aux plans tangents de la surface de référence que toutes les fois que les traces principales d'un faisceau (R), lieu des normales à une surface, découpent (O) suivant un réseau conjugué, les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes d'une enveloppe de sphères dont une des nappes est trajectoire orthogonale des droites R. Il est naturel de prendre le rayon de la sphère enveloppe pour variable et de chercher l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait cette fonction, mais cette équation n'est guère maniable, et il y a intérêt à opérer comme nous l'avons fait au nº **80** pour trouver des faisceaux jouissant de la propriété indiquée.

Considérons donc les deux nappes d'une enveloppe de sphères tangentes à (O), dont les centres sont sur (S); soit (R) la seconde nappe; supposons enfin que les lignes de courbure se correspondent sur (O) et (R). Si C représente l'inverse du segment OS, on a (nº **80**)

$$\frac{dC}{du} = -\frac{d\varphi}{\varphi\, du}\left(C + \frac{P}{f}\right), \qquad \frac{dC}{dv} = -\frac{d\varphi}{\varphi\, dv}\left(C + \frac{Q}{g}\right).$$

Si M et N sont les points où le plan tangent à (S) en S rencontre les tangentes OX, OY aux lignes de courbure de (O) prises pour axes,

$$\frac{1}{OM} = -\frac{d\varphi}{f\varphi\, du}, \qquad \frac{1}{ON} = -\frac{d\varphi}{g\varphi\, dv}.$$

Enfin, la quantité φ elle-même vérifie l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{du\, dv} = \frac{d\varphi}{du}\frac{df}{f dv} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dg}{g du}$$

qui régit tout le problème.

On voit que, lorsqu'on connaîtra une valeur de φ satisfaisant à cette condition, on obtiendra C par des quadratures; il y a donc tout un système de valeurs de C correspondant à cette valeur de φ. Par conséquent, on connaîtra une famille de surfaces telles que (R), sur lesquelles les lignes de courbure correspondront à celles de (O). Mais le plan tangent à (R) contient MN qui ne dépend que de φ; il en résulte que le lieu des points R, pour toutes les valeurs de C, est le cercle normal en O à (O) dont le centre est sur MN.

On voit facilement que toutes les surfaces (R) normales à ce cercle font partie d'un système triplement orthogonal. Nous appellerons *système cyclique* un système triplement orthogonal dans lequel les trajectoires des surfaces d'une famille sont des cercles.

100. *Si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à une infinité et engendrent un système cyclique.* — Avant de tirer parti de ce qui précède, il convient d'établir que la façon dont nous avons été amené à considérer les systèmes cycliques donne ceux-ci avec une généralité complète.

Considérons des cercles normaux à (O) en chacun de ses points; on peut les définir comme l'intersection de sphères ayant leurs centres en deux points M et N des tangentes OX et OY aux lignes de courbure, et dont les rayons sont $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{B}$. Soit (R) une surface normale à la famille des cercles; si l'on mène la normale à (R), elle rencontrera OZ en un point S; égalons OS à $\frac{1}{C}$. Il est clair que la surface (R) existera si le plan tangent au lieu des points S passe par MN; on devra donc poser

$$\frac{dC}{du} = Af\left(C + \frac{P}{f}\right), \qquad \frac{dC}{dv} = Bg\left(C + \frac{P}{g}\right).$$

Mais ces équations ne sont possibles qu'autant que les dérivées $\frac{d^2C}{du\,dv}$ qu'on déduit de chacune soient égales, c'est-à-dire si

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[d\,\frac{(Af)}{dv} - d\,\frac{(Bg)}{du}\right]C + Af\,\frac{d}{dv}\left(\frac{P}{f}\right) - Bg\,\frac{d}{du}\left(\frac{Q}{g}\right) \\ &\qquad + \frac{P}{f}\,\frac{\partial(Af)}{\partial u} - \frac{Q}{g}\,\frac{\partial(Bg)}{\partial u} - \left(\frac{P}{f} - \frac{Q}{g}\right)AfCg = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation signifie qu'étant donnée une famille de cercles normaux à (O) et d'ailleurs complètement arbitraires, il existe toujours une seconde surface (R) normale aux faisceaux de cercles, mais seulement dans une étendue infiniment petite. Le lieu des points des cercles par lesquels on peut mener cet élément normal n'est pas en effet, généralement, une trajectoire des cercles.

Mais (32) met en évidence un résultat capital, à savoir que, s'il y a deux valeurs de C répondant à la question, il y en a une infinité, car cela ne peut avoir lieu que si

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{A}f) - \frac{d}{du}(\mathrm{B}g) = 0,$$

$$\mathrm{A}f\frac{d}{dv}\frac{\mathrm{P}}{f} - \mathrm{B}g\frac{d}{du}\left(\frac{\mathrm{Q}}{g}\right) + \left(\frac{\mathrm{P}}{f} - \frac{\mathrm{Q}}{g}\right)\left[\frac{\partial(\mathrm{A}f)}{\partial v} - \mathrm{A}f\mathrm{C}g\right] = 0.$$

On retrouve ainsi les équations du n° **80**, et partant le système canonique du n° **99**.

On résumera ce qui précède et l'on en fera saisir l'importance géométrique en disant :

Si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à toute une famille de surfaces qui font partie d'un système triplement orthogonal (système cyclique).

101. *Équation des systèmes cycliques en partant d'une des surfaces trajectoires. Les cercles osculateurs des trajectoires, dans un système triple orthogonal, le long d'une de leurs surfaces normales, engendrent un système cyclique.* — On obtiendra tous les systèmes cycliques contenant une surface (O) en intégrant sur celle-ci l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{du\,dv} = \frac{d\varphi}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dg}{g\,du},$$

qui est celle des systèmes triplement orthogonaux, des surfaces ayant même image sphérique, etc., etc. Les trajectoires des cercles s'obtiendront par des quadratures, pourvu, bien entendu, que l'on connaisse les lignes de courbure de (O). Il paraîtra sans doute digne de remarque que d'un système triple orthogonal quelconque on puisse dériver un système cyclique, mais ceci tient à une propriété géométrique que nous allons mettre en lumière.

Reportons-nous aux formules du n° **28** et soit

$$d\mathrm{S}^2 = \mathrm{H}^2\,d\rho^2 + \mathrm{H}_1^2\,d\rho_1^2 + \mathrm{H}_2^2\,d\rho_2^2$$

le dS^2 d'un système triplement orthogonal, dans lequel $H\,d\rho$ est l'élément OO′ qui sépare deux surfaces infiniment voisines, dont fait partie (O). Le plan normal à la trajectoire OO′, au point O′, d'après les formules (Φ''), a pour équation

$$Z' = Z - H\,d\rho - X\frac{dH}{H_1\,d\rho_1}\,d\rho - Y\frac{dH}{H_2\,d\rho_2}\,d\rho = 0.$$

Si l'on désigne par M et N les points où il rencontre les droites OX et OY, on a

$$\frac{1}{\overline{OM}} = -\frac{1}{H_1}\frac{dH}{H\,d\rho_1}, \qquad \frac{1}{\overline{ON}} = -\frac{1}{H_2}\frac{dH}{H\,d\rho_2},$$

ou, en prenant les notations habituelles sur (O),

$$\frac{1}{\overline{OM}} = -\frac{1}{f}\frac{dH}{H\,du}, \qquad \frac{1}{\overline{ON}} = -\frac{1}{g}\frac{dH}{H\,dv}.$$

On remarquera que la droite MN n'est autre chose que la polaire de la trajectoire OO′, c'est-à-dire que si l'on décrit des sphères ayant leurs centres en M et N et passant par O, elles se couperont suivant le cercle osculateur de la trajectoire des surfaces de même famille que (O), issue de O.

Enfin, si l'on rapproche cela de ce qui a été dit plus haut, on obtient ce théorème :

Étant donné un système triplement orthogonal de surfaces, si l'on considère les cercles osculateurs des trajectoires d'une famille, tout le long d'une surface normale à ces courbes, tous les cercles donnent naissance à un système cyclique, c'est-à-dire qu'ils sont eux-mêmes normaux à une infinité de surfaces.

On aurait pu d'ailleurs prévoir ce résultat, en remarquant que les cercles osculateurs aux trajectoires peuvent être considérés (à la limite) comme normaux à deux surfaces infiniment voisines sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent.

102. *A tout système cyclique correspond une infinité d'autres systèmes normaux à la sphère.* — Si nous reprenons les équations du n° **99**, nous pouvons les écrire sous la forme

$$\frac{d}{du}(C\varphi) = \frac{d\varphi}{du}\frac{P}{f}, \qquad \frac{d}{dv}(C\varphi) = \frac{d\varphi}{dv}\frac{Q}{g}$$

et, si l'on considère $C\varphi$ comme une nouvelle variable, que l'on élimine φ, il vient

$$\frac{d^2}{du\,dv}(C\varphi) = \frac{d}{du}(C\varphi)\frac{dP}{P\,dv} + \frac{d}{dv}(C\varphi)\frac{dQ}{Q\,du};$$

par conséquent, *la connaissance de deux trajectoires d'un système cyclique équivaut à celle d'un système cyclique normal à la sphère.* Ceci demande explication. Soient (O) et (R) deux surfaces trajectoires d'un système cyclique, soient ω et ρ les images de O et de R sur la sphère de rayon unité; on peut faire passer un cercle normal à la sphère en ω et ρ. Il résulte de ce qui précède que tous les cercles ainsi construits engendrent un système cyclique.

103. *L'intégrale des surfaces trajectoires est connue si l'une d'entre elles est plane ou sphérique.* — Lorsque la surface (O) est une sphère ou un plan, il n'est pas besoin de se donner les lignes remplaçant les lignes de courbure pour trouver les surfaces trajectoires; on a, dans ce cas (pour la sphère, par exemple),

$$C\varphi = K\varphi + K_1,$$

où K et K_1 désignent des constantes; K est l'inverse du rayon de la sphère.

104. *Systèmes cycliques dérivés les uns des autres. Correspondance des trajectoires.* — Si l'on remplace φ par $\varphi + K$, où K est constant, l'équation en φ ne varie pas, mais on obtient un nouveau système cyclique. Les trajectoires des deux systèmes sont liées entre

elles par une relation fort simple. On a manifestement

$$C\varphi = C'(\varphi + K),$$

en désignant par C' ce que devient C lorsque φ s'accroît de K.

On vérifie très facilement qu'aux points correspondants des trajectoires qui en dérivent les normales sont parallèles; par conséquent : *les trajectoires du second système ont même image sphérique que celles du premier système. La droite qui joint les points correspondants passe toujours par le point* O.

105. *Intégrale des surfaces trajectoires quand on connaît trois d'entre elles. Diverses formes de l'intégrale.* — Nous avons dit qu'il était nécessaire de connaître les lignes de courbure d'une surface trajectoire pour ramener aux quadratures l'intégration des autres surfaces trajectoires d'un système cyclique; mais, si l'on connaît trois trajectoires, on peut construire toutes les autres, même sans effectuer de quadratures; c'est ce que j'ai établi en détail dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, le 24 février 1873; sans établir les démonstrations, il convient de rappeler les résultats :

Les normales à trois surfaces trajectoires rencontrent la normale à une quatrième trajectoire, en trois points qui forment avec le pied de celle-ci un groupe dont le rapport anharmonique est constant.

Appelons *corde* toute droite joignant à chaque instant les points correspondants de deux trajectoires, et appelons ces points *points limites*.

Que l'on prolonge la normale à une trajectoire jusqu'à la rencontre d'une corde, et que du point d'intersection l'on mène une seconde tangente au cercle, le lieu des points de contact est une surface trajectoire.

Sur une corde donnée, deux points, intersections des normales à deux couples de surfaces trajectoires associées, forment avec les

points limites un groupe dont le rapport anharmonique est constant.

La droite qui joint deux points, intersections des normales à deux courbes de surfaces trajectoires associées, est une corde.

106. *Sur les deux manières dont on peut engendrer les systèmes cycliques normaux à un plan.* — Les systèmes cycliques les plus simples sont ceux qui dérivent de la sphère ou du plan : que l'on construise des cercles normaux à une surface arbitraire et à une sphère, et l'on constituera un système cyclique; en effet, un cercle ne peut être normal à une sphère sans la couper normalement une seconde fois. Donc chacun des cercles sera normal à trois trajectoires et, en vertu de ce qui a été dit plus haut, il sera aussi normal à une infinité de surfaces.

Pour trouver un système cyclique normal à un plan, on peut aussi partir d'une surface arbitraire que l'on considérera comme le lieu de l'intersection de la normale au plan et d'une normale à une trajectoire associée quelconque. Les distances au plan des points correspondants de toutes les surfaces qu'on obtient en faisant varier la trajectoire associée sont proportionnelles entre elles. Les lignes qui correspondent sur ces surfaces aux lignes de courbure des surfaces trajectoires forment des réseaux conjugués assujettis à la condition de se projeter orthogonalement sur le plan.

107. *Recherche du réseau conjugué tracé sur une surface du deuxième ordre et qui se projette sur un plan suivant un réseau orthogonal.* — Le problème de la recherche sur une surface donnée du réseau conjugué qui se projette sur un plan suivant un réseau orthogonal présente de l'intérêt par lui-même, et, pour montrer comment on peut tirer, même des formules générales, des résultats qui semblent ne dépendre que de la Géométrie cartésienne, nous résoudrons la question pour les surfaces du second degré.

Mais d'abord remarquons que, si (u, v) représente sur le plan le réseau orthogonal cherché, on a pour le Z de la surface (n° **25**)

$$\frac{d^2 Z}{du\,dv} = \frac{dZ}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{dZ}{dv}\frac{dg}{g\,du}.$$

La forme même de cette équation fait ressortir qu'on ne changera pas le réseau si l'on ajoute au Z de la surface le Z d'une autre surface répondant à la question, et cette observation n'est pas oiseuse, car le plan constitue toujours une solution : on pourra donc retrancher ou ajouter le Z d'un plan à celui de la surface donnée ; on sait que dans tous les cas la projection du réseau cherché ne varie pas.

Mettons ceci à profit pour les surfaces du second ordre. Leur équation peut s'écrire

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-(Ax+By-Cz)^2=0,$$

en mettant en évidence le cylindre circonscrit dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et le plan de contact

$$Ax+By-Cz=0.$$

On voit que l'on peut écrire

$$Cz=Ax+By\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1};$$

mais puisqu'on est en droit de retrancher l'ordonnée d'un plan, le réseau ne sera pas altéré (en projection) si l'on résout l'équation dans le cas où

$$Cz=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1},$$

c'est-à-dire en supposant que le plan est un des plans principaux de l'ellipsoïde. Rien n'est plus simple que d'achever par l'analyse, mais notre théorie se suffit à elle-même ; en effet, nous sommes encore libre de donner à C telle valeur que nous voulons ; supposons-la infiniment petite ; l'extrémité des segments décrit alors une surface infiniment voisine du plan, et sur laquelle on est en droit de regarder le réseau conjugué qui se projette suivant (u, v) comme le réseau des lignes de courbure. Si l'on passe à la limite, le réseau cherché coïncide avec les

lignes de courbure de la surface du second degré infiniment aplatie

$$o = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1},$$

c'est-à-dire avec les coniques homofocales à la trace du cylindre circonscrit.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si de tous les points d'une surface du second degré comme centres, on décrit des sphères tangentes à un plan, les lignes de courbure de la seconde nappe de l'enveloppe de ces sphères ont pour correspondantes sur le plan les coniques homofocales au contour apparent de la surface du second degré.

108. *Faisceaux dont les traces principales sont conjuguées sur une surface du second ordre. Théorèmes sur les surfaces du second ordre homofocales.* — Dans ce qui précède nous avons déterminé des faisceaux (R) dont les traces principales sont conjuguées, en introduisant leurs surfaces trajectoires, mais il est quelquefois plus avantageux de les considérer isolément : c'est ce que nous avons fait dans une étude consacrée aux surfaces du second degré (*Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 1489 et 1570) et qu'on peut résumer ainsi :

Les traces principales d'un faisceau (R) *sur une surface du second degré ne peuvent être conjuguées à la première rencontre sans l'être également à la seconde.*

Les traces principales ne peuvent être conjuguées sur deux surfaces homofocales sans l'être sur toutes les autres surfaces homofocales; dans ce cas, les droites sont normales à des surfaces.

Réciproquement, *si les normales d'une surface donnent lieu, sur une surface du second ordre, à des traces principales conjuguées, il en est de même sur toutes les surfaces homofocales.*

Dans ce cas, *les développables suivant lesquelles on peut ranger les droites du faisceau sont toutes individuellement circonscrites à des surfaces du second degré homofocales aux précédentes.*

Ces résultats très généraux trouvent une application intéressante aux surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.

Nous aurons l'occasion de les étendre encore dans un travail que nous produirons ultérieurement.

CHAPITRE XII.

VARIATION DES COURBURES $\frac{1}{R_1 R_2}$ ET $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ QUAND ON PASSE D'UNE SURFACE A UNE SURFACE INFINIMENT VOISINE.

109. *Mise en équation du problème.* — Quand on veut étudier une famille de surfaces définies par certaines conditions géométriques ou analytiques, on commence toujours par chercher à déduire d'une surface de la famille la surface infiniment voisine; c'est ainsi que nous avons procédé pour établir la théorie des systèmes triplement orthogonaux. Il est nécessaire, bien souvent, d'exprimer que certaines conditions relatives à la courbure persistent sur les surfaces de la famille; c'est pourquoi nous allons établir la variation des courbures dans le système de transformation le plus général.

Soit tracé sur la surface de référence un réseau orthogonal (u, v) quelconque: faisons correspondre aux points de (O) les points d'une surface (S), les coordonnées du point S étant

$$\xi = \alpha\, d\rho, \qquad \eta = \beta\, d\rho, \qquad \zeta = \gamma\, d\rho,$$

où $d\rho$ désigne l'accroissement du paramètre individuel de (O) lorsqu'on passe à (S).

Les équations de la normale à (S) sont (aux infiniment petits du second ordre près)

$$\frac{X - \alpha\, d\rho}{-g\left(\frac{d\gamma}{du} - P\alpha + f D\beta\right)} = \frac{Y - \beta\, d\rho}{-f\left(\frac{d\gamma}{dv} - Q\beta + g D\alpha\right)}$$
$$= \frac{Z - \gamma\, d\rho}{fg + \left[f\left(\frac{d\beta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\alpha + Q\zeta\right) + g\left(\frac{d\alpha}{du} + \frac{df}{g\,dv}\beta + P\zeta\right)\right] d\rho}.$$

Posons

$$g\left(\frac{d\gamma}{du} - P\alpha + f D\beta\right) = \pi, \qquad f\left(\frac{d\gamma}{dv} - Q\beta + g D\alpha\right) = \pi',$$

$$f\left(\frac{d\beta}{dv} + \frac{dg}{f du}\alpha + Q\zeta\right) + g\left(\frac{d\alpha}{du} + \frac{df}{g dv}\beta + P\zeta\right) = k,$$

de telle sorte que les équations de la normale s'écriront

$$\frac{X - \alpha d\rho}{\pi d\rho} = \frac{Y - \beta d\rho}{\pi' d\rho} = \frac{-Z + \gamma d\rho}{fg + k d\rho}.$$

Il s'agit de former l'équation des rayons de courbure principaux au point S. Afin d'avoir des calculs bien ordonnés, nous emploierons une méthode particulière susceptible d'applications fréquentes, d'ailleurs.

110. *Artifice propre à la résolution de questions similaires.* — Considérons une surface parallèle à (S) et distante de celle-ci de l; l'aire de cette surface, correspondant à une aire infiniment petite de (S) ou de (O), est infiniment petite du troisième ordre, *si l est égal à l'un des rayons de courbure principaux de* (S); mais l'aire de la surface parallèle est proportionnelle à sa projection sur le plan des XOY : on calculera donc cette projection et l'on exprimera qu'elle est nulle; l'équation résultante sera du second degré en l, c'est-à-dire qu'elle donnera les rayons de courbure principaux de (S).

Nous suivrons, par exemple, deux directions arbitraires du, dv, du', dv' sur (O); l'aire résultante sur la surface parallèle sera proportionnelle à la quantité

$$(\Delta Y \, \Delta X' - \Delta X \, \Delta Y'),$$

que l'on peut former immédiatement. Ajoutons que rien n'empêche de prendre les (u) et (v) pour les chemins à suivre, ce qui simplifie considérablement les calculs. Par cet artifice, on est dispensé d'écrire que, suivant certaines directions du, dv, les normales se rencontrent et, par conséquent, on n'a pas à éliminer du et dv pour former l'équation des rayons de courbure principaux. Il est clair que la remarque qui précède s'applique à tous les problèmes de Géométrie autour des surfaces où il s'agit de trouver les foyers d'un faisceau de droites.

111. *Calcul des équations.* — Les coordonnées instantanées d'un point de la surface parallèle à (S) sont

$$\xi = \alpha\, d\rho - \frac{l\pi\, d\rho}{fg + k\, d\rho},$$
$$\eta = \beta\, d\rho - \frac{l\pi'\, d\rho}{fg + k\, d\rho},$$
$$\zeta = \gamma\, d\rho + l,$$

car les longueurs comptées suivant la normale ne diffèrent que par des quantités du second ordre de leurs projections sur l'axe des Z. Il suffit d'appliquer nos formules (F) pour trouver

$$\frac{\Delta X}{du}(fg + 2k\, d\rho) = fg(f + Pl) + d\rho\left\{2k(f + Pl) + fgM - l\left[\frac{d\pi}{du} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du} + \frac{df}{g\, dv}\pi'\right]\right\},$$

$$\frac{\Delta Y}{du}(fg + 2k\, d\rho) = -f^2 g D l + d\rho\left\{-2kfDl + fgN - l\left[\frac{d\pi'}{du} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{du} - \frac{df}{g\, dv}\pi\right]\right\},$$

$$\frac{\Delta X'}{dv}(fg + 2k\, d\rho) = -g^2 f D l + d\rho\left\{-2kgDl + fgN' - l\left[\frac{d\pi}{dv} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{dv} - \frac{dg}{f\, du}\pi'\right]\right\},$$

$$\frac{\Delta Y'}{dv}(fg + 2k\, d\rho) = fg(g + Ql) + d\rho\left\{2k(g + Ql) + fgM' - l\left[\frac{d\pi'}{dv} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv} + \frac{dg}{f\, du}\pi\right]\right\}.$$

où nous avons posé

$$M = \frac{d\alpha}{du} + \beta\frac{df}{g\, dv} + P\gamma, \qquad M' = \frac{d\beta}{dv} + \alpha\frac{dg}{f\, du} + Q\gamma,$$

$$N = \frac{d\beta}{du} - \frac{df}{g\, dv}\alpha - fD\gamma, \qquad N' = \frac{d\alpha}{dv} - \frac{dg}{f\, du}\beta - gD\gamma.$$

$$fM' + gM = k.$$

Écrivant que

$$\Delta Y\, \Delta X' - \Delta X\, \Delta Y' = 0,$$

nous aurons immédiatement l'équation des rayons de courbure cherchés. Si l'on néglige, comme on l'a fait jusqu'à présent, toutes les puissances de $d\rho$ supérieures à la première, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l^2}(fg + 5k\,d\rho)fg \\
&\quad + \frac{1}{l}\Big(fg(fQ + gP) + d\rho \\
&\qquad \times \Big\{ 4k(fQ + gP) + fg(PM' + QM) + fg\,D(fN' + gN) \\
&\qquad\qquad - f\left[\frac{d\pi'}{dv} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\pi\right] \\
&\qquad\qquad - g\left[\frac{d\pi}{du} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du} + \frac{df}{g\,dv}\pi'\right]\Big\}\Big) \\
&\quad + fg(PQ - fg\,D^2) - d\rho \\
&\qquad \times \Big\{ -4k(PQ - fg\,D^2) + P\left[\frac{d\pi'}{dv} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\pi\right] \\
&\qquad\qquad + f\,D\left[\frac{d\pi}{dv} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\pi'\right] \\
&\qquad\qquad + Q\left[\frac{d\pi}{du} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du} + \frac{df}{g\,dv}\pi'\right] \\
&\qquad\qquad + g\,D\left[\frac{d\pi'}{du} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{du} - \frac{df}{g\,dv}\pi\right]\Big\}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme de cette expression peut être simplifié au moyen des équations de Codazzi; on vérifie en effet que

$$\begin{aligned}
&P\left[\frac{d\pi'}{dv} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\pi\right] + f\,D\left[\frac{d\pi}{dv} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\pi'\right] \\
&+ Q\left[\frac{d\pi}{du} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du} + \frac{df}{g\,dv}\pi'\right] + g\,D\left[\frac{d\pi'}{du} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{du} - \frac{df}{g\,dv}\pi\right]
\end{aligned}$$

peut s'écrire

$$fg\left[\frac{d}{du}\left(\frac{Q\pi + g\,D\pi'}{fg}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{P\pi' + f\,D\pi}{fg}\right)\right].$$

Il convient naturellement de considérer les deux quantités $\frac{1}{l_1 l_2}$ et $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}$; mais si on les remplace par celles-ci

$$\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)d\rho, \qquad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)d\rho,$$

qui mettent en évidence la variation de la courbure de Gauss et de la courbure moyenne, il vient, en tenant compte de ce qui précède et passant à la limite,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} -fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1R_2}\right) &= \frac{k}{R_1R_2}+\frac{d}{du}\left(\frac{Q\varpi+gD\varpi'}{fg}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{P\varpi'+fD\varpi}{fg}\right)\\ -fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) &= k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+PM'+QM+D(fN'+gN)\\ &\quad-\frac{1}{g}\left(\frac{d\varpi'}{dv}-\frac{\varpi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\varpi\right)\\ &\quad-\frac{1}{f}\left(\frac{d\varpi}{du}-\frac{\varpi}{fg}\frac{d(fg)}{du}+\frac{df}{g\,dv}\varpi'\right).\end{aligned}\right.$$

Ces deux formules ont une grande importance, car leur généralité permet de les appliquer dans toutes les questions où interviennent directement soit la courbure de Gauss, soit la courbure moyenne.

La dernière formule peut encore être mise sous la forme

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &-fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\\ &\quad=k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+PM'+QM+D(fN'+gN)-\frac{d}{du}\left(\frac{\varpi}{f}\right)-\frac{d}{dv}\left(\frac{\varpi'}{g}\right).\end{aligned}\right.$$

On voit que la fonction k est mise en évidence d'une façon toute spéciale.

112. *Ce que signifie la fonction k.* — On trouve facilement la signification géométrique de cette quantité. Sur (S), on a

$$\Delta X=(f+M\,d\rho)\,du,\qquad \Delta Y=N\,d\rho\,du,$$
$$\Delta X'=N'\,d\rho\,dv,\qquad \Delta Y'=(g+M'\,d\rho)\,dv;$$

d'où résulte, au troisième ordre près,

$$\Delta X\,\Delta Y'-\Delta Y\,\Delta X'=du\,dv\,[fg+(fM'+gM)\,d\rho].$$

Si donc nous désignons par $d(O)$ et $d(S)$ les éléments correspon-

dants de (O) et de (S), on a

$$\frac{d(S)-d(O)}{d(O)\,d\rho}=\frac{(fM'+gM)}{fg}=\frac{k}{fg}.$$

Ainsi, *lorsque la fonction k est nulle, les aires correspondantes des deux surfaces sont égales.*

On peut écrire la valeur de k sous la forme

$$k=\frac{d}{du}(g\alpha)+\frac{d}{dv}(f\beta)+\gamma(Pg+Qf),$$

et de ceci nous allons déduire une propriété des surfaces dont nous nous sommes occupé au n° **95**.

Supposons que la surface (O) soit rapportée à ses lignes de courbure et que (S) soit une surface telle qu'en S le plan tangent soit toujours parallèle au plan tangent en O à (O), alors

$$\alpha=\frac{d\gamma}{P\,du},\qquad \beta=\frac{d\gamma}{Q\,dv};$$

il vient pour k

$$k=\frac{d}{du}\left(\frac{g}{P}\frac{d\gamma}{du}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{f}{Q}\frac{d\gamma}{dv}\right)+\gamma(Pg+Qf).$$

Dans ce cas, nos formules se réduisent considérablement ; elles donnent

$$-fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1R_2}\right)=\frac{k}{R_1R_2},$$

$$-fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+P\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{d\gamma}{Q\,dv}\right)+\frac{dg}{f\,du}\frac{d\gamma}{P\,du}+Q\gamma\right]$$
$$+Q\left[\frac{d}{du}\left(\frac{d\gamma}{P\,du}\right)+\frac{df}{g\,dv}\frac{d\gamma}{Q\,dv}+P\gamma\right].$$

115. *Conséquence au sujet des surfaces étudiées au Chapitre X.* — Si l'on suppose que k soit nul et que γ vérifie l'équation (16), on retombe sur les surfaces du n° **95**. Ainsi, *lorsque deux surfaces se correspondent avec parallélisme de leurs plans tangents et correspondance des lignes isotropes, elles font chacune partie d'une famille de surfaces ayant même image sphérique de leurs lignes de courbure et dont les aires correspondantes sont égales.*

Les surfaces de ces familles ne sont pas identiques entre elles, car la variation $\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ n'est pas nulle, en général. A chaque surface de l'une des familles correspond une surface de l'autre famille, mais sans correspondance des lignes isotropes.

Dans le cas qui nous est connu, celui de la sphère et des surfaces à étendue minima, la surface infiniment voisine de la sphère est aussi une sphère.

114. *Surfaces infiniment voisines de la surface de référence et applicables sur elle. Remarque sur une conséquence analytique du théorème de Gauss.* — Le dS^2 de la surface (S), si l'on se borne aux termes du troisième ordre, peut s'écrire

$$dS^2 = f^2 du^2 + g^2 dv^2 + 2d\rho\,[fM\,du^2 + gM'\,dv^2 + (fN' + gN)\,du\,dv].$$

Ainsi donc on obtiendra une surface infiniment voisine de (O) et applicable sur celle-ci en posant

$$M = M = 0,$$

$$fN' + gN = 0.$$

On trouve alors

$$-fg\,\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{Q\pi + gD\pi'}{fg}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{P\pi' + fD\pi}{fg}\right),$$

et, d'après le théorème de Gauss, ceci doit être nul identiquement. Nous aurons l'occasion de faire cette vérification dans l'étude des couples de surfaces applicables et même d'en déduire la réduction du problème à sa forme canonique. Pour le moment, remarquons seulement que dans l'hypothèse où (S) est applicable sur (O)

$$+fg\,\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\pi}{f}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{\pi'}{g}\right).$$

En égalant à zéro cette variation, on sera conduit à chercher des surfaces que l'on peut déformer sans que pourtant les rayons de courbure principaux varient (ce problème a été complètement résolu par M. O. Bonnet).

115. *Recherche des surfaces ayant même aire et même aire sphérique qu'une surface donnée.* — Il résulte du théorème de Gauss que, si l'on déforme une surface, l'aire sphérique d'une portion de cette surface reste constante. Mais on peut trouver des surfaces dérivées d'une surface donnée (O) et telles que leurs aires soient égales à celle de (O) en même temps que leurs aires sphériques restent égales à celle de (O). Pourtant ces surfaces ne sont pas applicables l'une sur l'autre. La formule (33) va nous permettre de résoudre le problème dans un certain nombre de cas.

On peut évidemment ranger les surfaces en question à côté les unes des autres de façon qu'elles forment une famille continue. Soient (O) et (S) deux surfaces successives. La quantité $\Delta\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)$ doit être nulle en même temps que k; on a donc

$$\frac{d}{du}(g\alpha) + \frac{d}{dv}(f\beta) + \gamma(Pg + Qf) = 0$$

avec

$$\frac{d}{du}\left(\frac{Q\pi + gD\pi'}{fg}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{P\pi' + fD\pi}{fg}\right) = 0.$$

Supposons qu'on ait pris pour (u, v) le réseau des lignes de courbure, on pourra poser

$$Q\pi = fg\frac{d\varphi}{dv}, \qquad P\pi' = -fg\frac{d\varphi}{du},$$

d'où résulte

$$\alpha = \frac{d\gamma}{P\,du} - \frac{f}{PQ}\frac{d\varphi}{dv}, \qquad \beta = \frac{d\gamma}{Q\,dv} + \frac{g}{PQ}\frac{d\varphi}{du},$$

et tout le problème dépend de l'équation obtenue en substituant ces valeurs dans la première des conditions, à savoir

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g}{P}\frac{d\gamma}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{f}{Q}\frac{d\gamma}{dv}\right) \\ + \gamma(Pg + Qf) - \frac{d}{du}\left(\frac{fg}{PQ}\right)\frac{d\varphi}{du} + \frac{d}{dv}\left(\frac{fg}{PQ}\right)\frac{d\varphi}{dv} = 0.$$

Ainsi, φ pourra être prise arbitrairement et le problème dépendra d'une seule équation linéaire du second ordre en γ. Remarquons

même que, si l'on connaît une solution, l'équation sera ramenée à la forme (31).

Il est une série de valeurs de φ pour lesquelles cette réduction s'effectue d'elle-même. Posons en effet

$$\frac{d}{du}\left(\frac{fg}{PQ}\right)\frac{d\varphi}{du} = \frac{d}{dv}\left(\frac{fg}{PQ}\right)\frac{d\varphi}{dv};$$

le problème reste alors régi simplement par l'équation (31). Mais la condition précédente signifie que φ est fonction de $\frac{fg}{PQ}$, c'est-à-dire du produit des rayons de courbure principaux au point O. La surface (S) est dans ce cas fort intéressante, car si on lui mène des plans tangents parallèles à ceux de (O), on obtient une correspondance entre S et O qui conduit à des aires égales pour (S) et (O). Ainsi, sur ces deux surfaces, on peut faire correspondre les points d'une infinité de manières, en conservant des aires égales, en même temps que les aires sphériques ont même valeur.

116. *Cette étude devra être développée ultérieurement.* — Nous n'avons fait qu'effleurer les questions que soulèvent les formules (33) et (34), parce que notre but est principalement de faire envisager tout le parti qu'on peut tirer de la Géométrie autour des surfaces, telle que nous la pratiquons. Il conviendra sans doute, ultérieurement, de donner beaucoup de développement au Chapitre actuel et de former les familles de surfaces dont nous avons seulement démontré l'existence, mais toutes ces conséquences ne peuvent être poursuivies dans un aperçu aussi rapide que celui-ci (1).

(1) En particulier, si l'on cherche à construire une surface infiniment voisine d'une surface donnée et applicable sur celle-ci (supposée rapportée à ses lignes de courbure), on trouve, en posant $\frac{N'}{g} = -\frac{N}{f} = Z$, l'équation (31) dans laquelle p est remplacé par Z.

Mais, si l'on admet que la surface (O) est à la limite de déformation possible, comme on a, d'après les calculs du n° 114,

$$fg\frac{\Delta}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\pi}{f}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{\pi'}{g}\right),$$

CHAPITRE XIII.

Recherche des trajectoires orthogonales planes des surfaces.

117. *Mise en équation du problème. Variation du plan tangent à une surface élémentaire.* — Nous avons établi au n° **78** que, si des droites situées dans les plans tangents de la surface de référence étaient normales à des surfaces, elles restaient normales à d'autres surfaces, quelle que fût la forme de (O). Cette propriété nous amène à chercher une généralisation qui fait l'objet de ce Chapitre.

Considérons une courbe (C) tracée dans le plan tangent en O à la surface de référence; que l'on en construise autant dans tous les plans tangents, suivant une loi continue, on constituera un faisceau de courbes planes. Nous allons chercher dans quel cas ce faisceau admet une famille de surfaces trajectoires.

Soit

$$p = f(\varphi, u, v)$$

l'équation de la courbe située dans le plan XOY; p désigne la distance du point O à une tangente, φ l'angle que la perpendiculaire à cette tangente fait avec l'axe des x, u et v sont les paramètres définissant le point O sur (O). Les coordonnées du point de contact M de la tangente sont

$$\xi = p\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi, \qquad \eta = p\sin\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi.$$

Que l'on donne aux paramètres les accroissements du, dv, on obtien-

---

la fonction Z définissant une surface infiniment voisine de (O) et applicable sur elle doit satisfaire à l'équation

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\pi}{f}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{\pi'}{g}\right) = 0.$$

Or, celle-ci développée devient l'équation (16). Donc, lorsqu'une surface est à sa limite de forme, elle appartient à la classe de celles étudiées aux n°s 94 et 95 et, par conséquent, ses lignes de courbure sont isothermes.

(Paris, 23 mars 1890).

dra une seconde courbe (C'); soit M' le point de celle-ci situé dans le plan normal à M, et m sa projection sur le plan tangent en O, on a, comme au n° **75**,

$$\tang\theta = \frac{M'm}{Mm} = \frac{\Delta Z}{\Delta X \cos\varphi + \Delta Y \sin\varphi},$$

où θ désigne l'angle du plan mené par M' et la tangente en M, avec le plan XOY. On trouve

$$\tang\theta = \frac{(-P\,du + D\,g\,dv)\left(p\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi\right) + (f D\,du - Q\,dv)\left(p\sin\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi\right)}{\left(f\cos\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\frac{df}{g\,dv} + \frac{dp}{du}\right)du + \left(g\sin\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\frac{dg}{f\,du} + \frac{dp}{dv}\right)dv};$$

posons

$$A = p\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi, \qquad B = p\sin\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi,$$

$$G = f\cos\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\frac{df}{g\,dv} + \frac{dp}{du}, \qquad H = g\sin\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\frac{dg}{f\,du} + \frac{dp}{dv};$$

il en résulte

$$(35) \qquad \tang\theta = \frac{(-P\,du + D\,g\,dv)A + (f D\,du - Q\,dv)B}{G\,du + H\,dv}.$$

On observera que A, B, G, H sont des fonctions indépendantes de la forme de la surface (O).

118. *Du pinceau des tangentes aux courbes issues du plan normal de l'une d'elles. Équation différentielle des surfaces trajectoires.* — Établissons, parallèlement, l'équation de la variation du plan tangent en un point de la tangente en M considérée comme faisant partie du pinceau des tangentes infiniment voisines aux courbes (C') et dont les points de contact sont tous situés dans le plan normal en M à (C).

Les équations de la tangente en M sont

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi - p = 0, \qquad Z = 0;$$

on trouvera, comme d'habitude, à l'aide des équations (F'), les équations de la tangente en M'; éliminant Z, on obtient, pour l'équation de

la projection sur le plan des XY,

$$\left[-f\,du+\mathrm{X}+\mathrm{Y}\left(-\frac{df}{g\,dv}\,du+\frac{dg}{f\,du}\,dv\right)\right]\cos\varphi$$
$$+\left[-g\,dv+\mathrm{Y}+\mathrm{X}\left(-\frac{dg}{f\,du}\,dv+\frac{df}{g\,dv}\,du\right)\right]\sin\varphi$$
$$-p+(-\mathrm{X}\sin\varphi+\mathrm{Y}\cos\varphi)\,d\varphi-\Delta p=0,$$

dans laquelle $d\varphi$ est encore indéterminée; on exprimera sa valeur en fonction de du et dv en écrivant que le point M′ est dans le plan normal en M à (C), c'est-à-dire que

$$-\Delta\mathrm{X}\sin\varphi+\Delta\mathrm{Y}\cos\varphi=0.$$

Substituant ΔX et ΔY, il vient

$$f\,du\sin\varphi+g\,dv\cos\varphi$$
$$+p\left(\frac{dg}{f\,du}\,dv-\frac{df}{g\,dv}\,du\right)+\frac{d^2p}{d\varphi\,du}\,du+\frac{d^2p}{d\varphi\,dv}\,dv+\left(p+\frac{d^2p}{d\varphi^2}\right)d\varphi=0.$$

Remarquons d'ailleurs que

$$\mathrm{G}'=\frac{d\mathrm{G}}{d\varphi}=-f\sin\varphi+\frac{d^2p}{d\varphi^2}\,\frac{df}{g\,dv}+\frac{d^2p}{d\varphi\,du},$$
$$\mathrm{H}'=\frac{d\mathrm{H}}{d\varphi}=\quad g\cos\varphi-\frac{d^2p}{d\varphi^2}\,\frac{dg}{f\,du}+\frac{d^2p}{d\varphi\,dv},$$

par conséquent, on peut écrire, pour définir $d\varphi$,

$$du\left[\mathrm{G}'-\left(p+\frac{d^2p}{d\varphi^2}\right)\frac{df}{g\,dv}\right]$$
$$+dv\left[\mathrm{H}'+\left(p+\frac{d^2p}{d\varphi^2}\right)\frac{dg}{f\,du}\right]+\left(p+\frac{d^2p}{d\varphi^2}\right)d\varphi=0.$$

Mais, si R désigne le rayon de courbure en M de la courbe (C)

$$\mathrm{R}=p+\frac{d^2p}{d\varphi^2},$$

on en déduit définitivement

$$d\varphi=du\left(\frac{df}{g\,dv}-\frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{R}}\right)-dv\left(\frac{dg}{f\,du}+\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{R}}\right),$$

et, par conséquent, pour l'équation de la tangente projetée

$$\begin{aligned}
&X\cos\varphi + Y\sin\varphi - p\\
&+\left[-f\,du + Y\left(-\frac{df}{g\,dv}du + \frac{dg}{f\,du}dv\right)\right]\cos\varphi - \frac{dp}{du}du - \frac{dp}{dv}dv\\
&+\left[-g\,dv + X\left(-\frac{dg}{f\,du}dv + \frac{df}{g\,dv}du\right)\right]\sin\varphi\\
&+\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{df}{g\,dv}du - \frac{dg}{f\,du}dv\right) - \frac{G'du + H'dv}{R}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Prenons un point P sur la tangente en M et menons par ce point un plan normal à la tangente; il coupe la seconde tangente et sa projection aux points P′ et p. Il est clair que l'angle du plan tangent en P à la surface élémentaire du pinceau, avec XOY, est défini par la relation

$$\tan\theta = \frac{P'p}{Pp}.$$

P′p ne diffère pas du ΔX du point P; quant à Pp, c'est la distance du point P à la projection de la tangente en M′; c'est aussi la valeur que prend le second membre de l'équation de cette projection, quand on y substitue aux coordonnées courantes les coordonnées X et Y du point P; celles-ci ne sont d'ailleurs assujetties qu'à vérifier l'équation

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi - p = 0;$$

il vient

$$\begin{aligned}
-Pp = f\cos\varphi\,du + g\sin\varphi\,dv\\
+ \frac{G'du + H'dv}{R}\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\right)\\
+ \frac{dp}{d\varphi}\left(\frac{df}{g\,dv}du - \frac{dg}{f\,du}dv\right) + \frac{dp}{du}du + \frac{dp}{dv}dv,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation du pinceau

$$\tan\theta = \frac{(-P\,du + D\,g\,dv)X + (D\,f\,du - Q\,dv)Y}{\left\{\begin{aligned}&du\left(f\cos\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\frac{df}{g\,dv} + \frac{dp}{du}\right)\\ &+ dv\left(g\sin\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\frac{dg}{f\,du} + \frac{dp}{dv}\right) + \frac{G'du + H'dv}{R}\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\right)\end{aligned}\right\}};$$

mais, puisque P est sur la tangente en M, on peut toujours poser

$$X = A - l\sin\varphi, \qquad Y = B + l\cos\varphi,$$

où A et B ont les valeurs données plus haut, et l désigne la distance PM. Tenant compte des valeurs de G et H, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(-P\,du + Dg\,dv)(A - l\sin\varphi) + (fD\,du - Q\,dv)(B + l\cos\varphi)}{G\,du + H\,dv + \dfrac{G'\,du + H'\,dv}{R}\,l}.$$

119. *Équation des foyers, des directions principales. Condition d'orthogonalité. Elle est indépendante de la forme de la surface de référence.* — Aux foyers du pinceau, les plans tangents des surfaces élémentaires sont invariables, quels que soient du et dv; on a donc

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{-P(A - l\sin\varphi) + fD(B + l\cos\varphi)}{G + \dfrac{G'}{R}\,l} = \frac{Dg(A - l\sin\varphi) - Q(B + l\cos\varphi)}{H + \dfrac{H'}{R}\,l},$$

d'où l'on tire, en introduisant les rayons de courbure principaux de (O),

$$-\frac{\operatorname{tang}\theta}{\dfrac{fg}{R_1R_2}} = \frac{B + l\cos\varphi}{GDg + PH + \dfrac{(DgG' + PH')}{R}\,l} = \frac{A - l\sin\varphi}{GQ + fDH + \dfrac{(G'Q + fDH')}{R}\,l}.$$

Si l'on remarque enfin que

$$A\cos\varphi + B\sin\varphi = p,$$
$$A' = -R\sin\varphi, \qquad B' = R\cos\varphi,$$

on trouve, pour l'équation des plans principaux,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tang}^2\theta\,(HG' - GH') \\
&\quad + \operatorname{tang}\theta\,[Q(BG' - GB') + fD(BH' - HB') \\
&\qquad - P(AH' - HA' - gD(AG' - GA')] - \frac{pR.fg}{R_1R_2} = 0.
\end{aligned}$$

Le produit des deux valeurs de $\tang\theta$ est indépendant de la forme de (O). En particulier, si l'on veut que les plans principaux soient rectangulaires, on écrira

$$\mathrm{HG}' - \mathrm{GH}' = \frac{p\mathrm{R}fg}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}; \tag{36}$$

mais il résulte d'un théorème de M. Bertrand que si les plans principaux du pinceau sont rectangulaires, la surface trajectoire des courbes (C) passant par M existe. Si donc l'équation précédente a lieu pour tous les points de (C), c'est que les courbes telles que (C) sont les trajectoires d'une famille de surfaces.

La généralisation que nous avions soupçonnée se trouve ainsi réalisée : *si des courbes* (C) *tracées dans les plans tangents d'une surface* (O) *sont les trajectoires d'une famille de surfaces, on peut déformer* (O) *comme on veut, chaque plan tangent entraînant la courbe qu'il contient, et le faisceau des courbes* (C) *jouit toujours de la même propriété.*

120. *Établissement direct de la condition d'orthogonalité.* — Il nous est facile d'établir cette importante proposition sans faire aucun emprunt géométrique. Supposons, en effet, qu'il passe en M une surface trajectoire des courbes (C), son équation différentielle n'est autre que la condition trouvée plus haut

$$d\varphi = du\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{R}}\right) - dv\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{R}}\right),$$

qui définit la différentielle totale de φ; cette quantité existera donc si

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{R}}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{R}}\right) = 0;$$

développant, en tenant compte des équations de Codazzi,

$$\begin{aligned} 0 = &- \frac{fgp}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} + \frac{df}{dv}\sin\varphi + \frac{dg}{du}\cos\varphi \\ &+ \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{dv} - \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{du} - \frac{d\mathrm{G}'}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dv} + \frac{d\mathrm{H}'}{d\varphi}\frac{d\varphi}{du} - \frac{d^3p}{d\varphi^2\,dv}\frac{df}{g\,dv} + \frac{d^3p}{d\varphi^2\,du}\frac{dg}{f\,du}. \end{aligned}$$

mais on a les relations

$$\frac{d\varphi}{dv} = -\frac{dg}{f\,du} - \frac{H'}{R}, \qquad \frac{d\varphi}{du} = \frac{df}{g\,dv} - \frac{G'}{R},$$

$$\frac{dG'}{d\varphi} = -f\cos\varphi + \frac{d^3p}{d\varphi^3}\frac{df}{g\,dv} + \frac{d^3p}{d\varphi^2\,du},$$

$$\frac{dH'}{d\varphi} = -g\sin\varphi - \frac{d^3p}{d\varphi^3}\frac{dg}{f\,du} + \frac{d^3p}{d\varphi^2\,dv},$$

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dp}{dv} + \frac{d^3p}{d\varphi^2\,dv} + \left(\frac{dp}{d\varphi} + \frac{d^3p}{d\varphi^3}\right)\left(-\frac{dg}{f\,du} - \frac{H'}{R}\right),$$

$$\frac{dR}{du} = \frac{dp}{du} + \frac{d^3p}{d\varphi^2\,du} + \left(\frac{dp}{d\varphi} + \frac{d^3p}{d\varphi^3}\right)\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{G'}{R}\right).$$

Effectuant toutes les substitutions et les réductions, il vient (36).

121. *Troisième méthode pour l'établir.* — Nous avons déjà bien insisté sur cette équation d'orthogonalité, mais nous ne pouvons ne pas signaler comment on y parvient (peut-être de la façon la plus simple) en partant d'un théorème de Joachimsthal.

Deux courbes (C) et (C′) successives forment une bande de surface, si l'on exprime que les tangentes en M et M′ se rencontrent; comme M′M est normale à (C), cela veut dire que, sur cette bande infiniment étroite, MM′ est la direction d'une ligne de courbure : par conséquent (C) est tangente à l'autre ligne de courbure. Donc, si l'on mène deux plans tangents consécutifs le long de (C) à la bande en question, ils devront se couper suivant MM′; mais comme cet élément est dans un plan normal à (C), cela n'aura lieu qu'autant que l'angle θ ne variera pas le long de (C). Au fond, cette observation coïncide avec celle faite par Joachimsthal, d'où il a déduit que le plan d'une ligne de courbure plane coupe la surface suivant un angle constant.

Ainsi, exprimons que, le long de (C), $\tang\theta$ ne varie pas, et nous aurons l'équation en du et dv des plans principaux du pinceau considéré au § **118**. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}[&(-P\,du + Dg\,dv)A' + (fD\,du - Q\,dv)B'](G\,du + H\,dv)\\ &-(G'du + H'dv)[(-P\,du + Dg\,dv)A + (fD\,du - Q\,dv)B] = 0.\end{aligned}$$

Substituant à $\frac{dv}{du}$ sa valeur en fonction de $\tang\theta$, on retrouverait l'équation établie plus haut.

122. *Équation des images principales relatives à une trajectoire.* — L'équation qui détermine les images principales du pinceau des tangentes aux courbes (C) est développée :

$$\begin{aligned} du^2[-P(AG'-GA')+fD(BG'-GB')] \\ +du\,dv[-P(AH'-HA')+gD(AG'-GA') \\ +fD(BH'-HB')-Q(BG'-GB')] \\ +dv^2[-Q(BH'-HB')+gD(AH'-HA')=0. \end{aligned}$$

Si l'on exprime que ces deux directions sont conjuguées, on trouve

$$f(BH'-HB')+g(AG'-GA')=0,$$

qui est indépendante de la forme de la surface.

123. *Recherche des faisceaux de courbes identiques entre elles, normales à des surfaces. La surface enveloppe des plans est applicable sur la sphère. Équation différentielle des courbes.* — Comme première application, cherchons s'il est possible de trouver des courbes identiques qui soient normales à des surfaces.

Soit (C) l'une de ces courbes et P un point de son plan qui lui soit invariablement lié; on peut toujours supposer que le réseau (u, v) a été choisi parallèle à deux droites liées invariablement à C; soient à chaque instant a et b les coordonnées du point P. Il est clair que, si l'on exprime p en fonction de la distance p_1 de P aux tangentes de (C), on aura séparé, d'une part, les quantités fonctions de (u, v), et, d'autre part, celles qui ne tiennent qu'à la courbe elle-même. On a

$$p=a\cos\varphi+b\sin\varphi+p_1,$$

où p_1 est une fonction de φ seulement. Substituant dans l'équation de

condition, il vient

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{da}{dv} - b\frac{dg}{f\,du}\right)\left(\frac{db}{du} - a\frac{df}{g\,dv}\right)\right.\\
&\quad\left. - \left(g + a\frac{dg}{f\,du} + \frac{db}{dv}\right)\left(f + b\frac{df}{g\,dv} + \frac{da}{du}\right)\right]\\
&\quad + \left[\left(f + \frac{da}{du}\right)\frac{dg}{f\,du} + \frac{da}{dv}\,\frac{df}{g\,dv}\right]\left(\frac{dp_1}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\cos\varphi\right)\\
&\quad + \left[\left(g + \frac{db}{dv}\right)\frac{df}{g\,dv} + \frac{db}{du}\,\frac{dg}{f\,du}\right]\left(-\frac{dp_1}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\sin\varphi\right)\\
&\quad = \frac{\mathrm{R}(p_1 + a\cos\varphi + b\sin\varphi)fg}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}.
\end{aligned}$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée. Elle doit manifestement, d'après l'hypothèse, être indépendante de u et v, ce qui ne peut avoir lieu que si chacun des termes fonction de u, v divisé par $\frac{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{fg}$ est constant.

Mais il résulte de ceci, tout d'abord, que a et b sont constants. L'équation se réduit immédiatement et devient

$$\begin{aligned}
-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\frac{dg}{fg\,du}&\left(\frac{dp_1}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d^2p_1}{d\varphi_2}\cos\varphi - a\right)\\
+ \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\frac{df}{fg\,dv}&\left(-\frac{dp_1}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\sin\varphi - b\right)\\
&= \mathrm{R}(p_1 + a\cos\varphi + b\sin\varphi).
\end{aligned}$$

On voit aussi que le produit des rayons de courbure principaux de (O) doit être constant. La surface (O) est donc applicable sur la sphère ou sur la surface de révolution qui admet pour méridienne la tractrice.

On remarquera que les quantités $\frac{dg}{fg\,du}$, $\frac{df}{fg\,dv}$ doivent être aussi constantes, mais ce sont les courbures géodésiques des (u) et (v).

D'après un théorème dû à M. Liouville, toute ligne faisant un angle constant avec (u) ou (v) aura aussi sa courbure géodésique constante; on pourra donc prendre tels axes que l'on voudra autour de (O), et l'équation conservera toujours la forme ci-dessus; mais il est un sys-

tème d'axes qui s'impose naturellement : je veux parler de celui pour lequel les lignes (v) seront géodésiques. On obtient ainsi le réseau des méridiens et des parallèles de la surface de révolution sur laquelle (O) est applicable.

On doit avoir, d'après ce qui précède,

$$f = 1, \qquad \frac{dg}{g\,du} = \frac{1}{K},$$

et, d'après une des formules de Codazzi,

$$\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{du^2} = 0;$$

on en déduit sans difficulté

$$\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{K^2} = 0;$$

mais notre équation devient

$$\begin{aligned} K^2 - K\left(\frac{dp_1}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d^2 p_1}{d\varphi^2}\cos\varphi - a\right) \\ = \left(p_1 + \frac{d^2 p_1}{d\varphi^2}\right)(p_1 + a\cos\varphi + b\sin\varphi); \end{aligned}$$

il convient de poser

$$b = 0, \qquad a = -K,$$

ce qui conduit à l'équation définitive

$$Rp_1 + K\left(\frac{dp_1}{d\varphi}\sin\varphi - p_1\cos\varphi\right) = 0.$$

L'origine est maintenant le centre de courbure géodésique du parallèle; c'est, si l'on veut, le point situé sur l'axe de révolution, lorsque la surface est sous la forme de révolution. Si l'on considère deux axes rectangulaires, dirigés, l'un suivant OX, l'autre perpendiculairement et à partir de la nouvelle origine, l'équation différentielle de la courbe

peut s'écrire

$$pR = Kx.$$

Nous résumerons tout ce qui précède comme il suit :

On peut déplacer une courbe plane dans l'espace de telle façon que le faisceau de toutes ses positions constitue le faisceau des trajectoires d'une famille de surfaces. Si l'on fait abstraction du cas des droites, la surface enveloppe du plan des courbes est applicable sur la sphère (réelle ou imaginaire). La courbe est telle que le produit de son rayon de courbure par la distance d'une certaine origine à la tangente est proportionnel à l'abscisse.

124. *Sur deux cas particuliers auxquels ne s'appliquent pas les calculs précédents.* — Il y a deux cas particuliers qui ne rentrent pas dans la règle que nous venons d'énoncer, ce sont ceux qui infirment les calculs exécutés. On remarquera en effet que, dans le courant des opérations qui ont servi à établir la formule générale ou celle dont nous venons de faire l'examen, on a multiplié par R et par $R_1 R_2$, admettant implicitement qu'aucune de ces quantités n'était nulle ni infinie. Il conviendra de les examiner à part.

125. *Système cyclique où tous les cercles sont identiques.* — Revenons à l'étude particulière des trajectoires planes identiques. Bien que l'équation des courbes en question soit extrêmement simple en apparence, nous n'avons pu en trouver l'intégrale générale ; il est seulement une solution particulière mise en évidence qui correspond à

$$R = K, \qquad p = x.$$

Les courbes sont alors des cercles ayant leurs centres aux points de contact des plans tangents et dont le rayon est égal à la racine carrée du produit des rayons de courbure principaux changé de signe.

On peut construire un système cyclique dans lequel tous les cercles trajectoires sont identiques; la surface enveloppe de leurs plans coïncide avec le lieu de leurs centres, elle est applicable sur la surface de révolution qui a pour méridienne la tractrice.

Lorsque les courbes ont toute leur généralité, leurs surfaces trajectoires ne font pas partie d'un système triplement orthogonal, car l'équation en du, dv des images principales contient encore p et R. Pour le système cyclique, au contraire, le système existe.

126. *Recherche générale des systèmes cycliques.* — Appliquons encore les formules trouvées plus haut au cas déjà élucidé différemment où les courbes (C) sont des cercles; on sait d'avance que la solution a une grande généralité.

Soient a et b les coordonnées du centre du cercle (C), R le rayon de celui-ci; on a

$$p = a\cos\varphi + b\sin\varphi + \mathrm{R},$$

où a, b et R sont simplement fonctions de u et v.

$$\mathrm{A} = a + \mathrm{R}\cos\varphi, \qquad \mathrm{B} = b + \mathrm{R}\sin\varphi,$$

$$\mathrm{G} = \frac{d\mathrm{R}}{du} + \cos\varphi\left(f + b\frac{df}{g\,dv} + \frac{da}{du}\right) - \sin\varphi\left(a\frac{df}{g\,dv} - \frac{db}{du}\right),$$

$$\mathrm{G}' = -\sin\varphi\left(f + b\frac{df}{g\,dv} + \frac{da}{du}\right) - \cos\varphi\left(a\frac{df}{g\,dv} - \frac{db}{du}\right),$$

$$\mathrm{H} = \frac{d\mathrm{R}}{dv} + \sin\varphi\left(g + a\frac{dg}{f\,du} + \frac{db}{dv}\right) - \cos\varphi\left(b\frac{dg}{f\,du} - \frac{da}{dv}\right),$$

$$\mathrm{H}' = \cos\varphi\left(g + a\frac{dg}{f\,du} + \frac{db}{dv}\right) + \sin\varphi\left(b\frac{dg}{f\,du} - \frac{da}{dv}\right).$$

En les écrivant sous la forme

$$\mathrm{G} = \frac{d\mathrm{R}}{du} + \mathrm{M}\cos\varphi - \mathrm{N}\sin\varphi, \qquad \mathrm{G}' = -\mathrm{M}\sin\varphi - \mathrm{N}\cos\varphi,$$

$$\mathrm{H} = \frac{d\mathrm{R}}{dv} + \mathrm{M}'\sin\varphi - \mathrm{N}'\cos\varphi, \qquad \mathrm{H}' = \mathrm{M}'\cos\varphi + \mathrm{N}'\sin\varphi,$$

l'équation d'orthogonalité devient

$$\mathrm{NN}' - \mathrm{MM}' - \frac{\mathrm{R}^2 fg}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}$$
$$= \sin\varphi\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{R}}{dv} + \mathrm{N}'\frac{d\mathrm{R}}{du} + \frac{b\mathrm{R}fg}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\right) + \cos\varphi\left(\mathrm{N}\frac{d\mathrm{R}}{dv} + \mathrm{M}\frac{d\mathrm{R}}{du} + \frac{afg\mathrm{R}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\right),$$

et il faut que cette relation ait lieu quel que soit l'angle φ.

On pourrait transformer cette équation en mettant en évidence $\tang \frac{\varphi}{2}$; on obtiendrait une équation du second degré par rapport à cette quantité, d'où l'on déduirait le théorème du n° **100**, à savoir que, si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à une infinité. Mais on voit immédiatement que l'équation trouvée plus haut ne peut être indépendante de φ que si l'on a à la fois

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{NN}' - \mathrm{MM}' - \frac{\mathrm{R}^2 fg}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_1} = 0,\\ &\mathrm{M}\frac{d\mathrm{R}}{dv} + \mathrm{N}'\frac{d\mathrm{R}}{du} + \frac{b\mathrm{R}fg}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} = 0,\\ &\mathrm{N}\frac{d\mathrm{R}}{dv} + \mathrm{M}'\frac{d\mathrm{R}}{du} + \frac{afg\mathrm{R}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} = 0. \end{aligned}\right.$$

127. *Réduction du problème à un système canonique*. — Il s'agit maintenant de ramener ces équations à un système *canonique*, c'est-à-dire d'arriver à ne faire tout dépendre que d'une seule équation aux différentielles partielles, les deux autres équations étant ou résolues ou ramenées aux quadratures.

Multiplions la seconde des équations (37) par N et la troisième par M, puis retranchons en tenant compte de la première, il vient

$$\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{du} - a\mathrm{M} + b\mathrm{N} = 0;$$

on trouve de même

$$\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{dv} + a\mathrm{N}' - b\mathrm{M}' = 0,$$

et il suffira de prendre l'une des trois premières équations pour avoir un système complet, déjà réduit.

Nos deux dernières équations conduisent immédiatement à une conséquence bien remarquable; elles peuvent s'écrire, en effet,

$$\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{du} - a\frac{da}{du} - b\frac{db}{du} = af,$$

$$\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{dv} - a\frac{da}{dv} - b\frac{db}{dv} = bg.$$

Posons

$$R^2 - (a^2 + b^2) = 2Z;$$

les équations précédentes donnent

$$a = \frac{dZ}{f\,du}, \qquad b = \frac{dZ}{g\,dv},$$

$$R^2 - 2Z + \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2.$$

Il est facile de donner une signification géométrique à tout ceci.

Décrivons de tous les points de (O) comme centres, des sphères telles que le carré de leur rayon soit égal à $-2Z$, leur équation sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2Z,$$

les équations de leur corde de contact sont

$$x = \frac{dZ}{f\,du}, \qquad y = +\frac{dZ}{g\,dv}$$

(*voir* n° 55). Enfin la *puissance* du pied de leur corde de contact sur le plan tangent, puissance prise par rapport à la sphère enveloppée, est

$$+2Z + \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2,$$

c'est-à-dire précisément le carré du rayon du cercle (C).

128. *Interprétation des résultats précédents à l'aide de la Géométrie imaginaire de M. Laguerre.* — Il résulte de ceci que l'enveloppe de sphères auxiliaire à laquelle nous sommes conduit par le calcul sera imaginaire quand les cercles (C) seront réels, et inversement. En adoptant les idées de M. Laguerre, sur les transformations imaginaires, on obtient ici un exemple intéressant, conduisant toujours à une propriété réelle associée à une propriété corrélative s'appliquant à des quantités imaginaires; lorsque celles-ci deviennent réelles, le premier théorème, tout en subsistant, s'applique à son tour à des quantités imaginaires.

Nous dirons avec M. Laguerre qu'un cercle est l'image d'un point, en considérant le cercle comme la ligne double réelle du cône isotrope (sphère de rayon nul), passant par le point supposé imaginaire. Inversement, étant donné un cercle imaginaire, il sera représenté par deux points réels qui sont les sommets des cônes isotropes passant par ce cercle.

Dans notre espèce, les cercles (C) et les points où les sphères auxiliaires touchent leurs enveloppes constituent un système d'images réciproques. En effet, les coordonnées d'un point de l'enveloppe sont

$$\xi = \frac{dZ}{f\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{g\,dv}, \qquad \zeta = \sqrt{-\left[2Z + \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2\right]},$$

et la sphère de rayon nul

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = 0$$

est coupée par le plan des XY suivant le cercle

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \left[2Z + \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2\right],$$

c'est-à-dire précisément le cercle (C).

129. *La connaissance d'un système cyclique équivaut à celle d'une enveloppe de sphères telle que les points focaux des cordes de contact soient conjugués harmoniques par rapport aux points de contact, et inversement.* — Ainsi les trois quantités a, b, R sont exprimées en fonction d'une seule quantité Z, et nous venons de montrer comment elles lui sont liées géométriquement. Nous avons maintenant à chercher l'équation différentielle à laquelle satisfait Z, car on voit qu'il faut encore tenir compte de

$$NN' - MM' = \frac{R^2 fg}{R_1 R_2};$$

mais il se trouve que nous avons déjà effectué les calculs, et même qu'en rencontrant ici l'équation précédente nous pouvons immédiatement l'interpréter géométriquement. Reportons-nous, en effet, au

n° **65**, et cherchons quel est le produit des distances focales relatives au faisceau des droites normales aux plans des cercles (C) et passant par leurs centres, ou, si l'on veut, du faisceau des cordes de contact de notre enveloppe de sphères auxiliaire. On a

$$-\frac{Z_1 Z_2 fg}{R_1 R_2}+\left(f+\frac{da}{du}+\frac{df}{g dv}b\right)\left(g+\frac{db}{dv}+\frac{dg}{f du}a\right)$$
$$-\left(\frac{db}{du}-\frac{df}{g dv}a\right)\left(\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f du}b\right)=0.$$

mais la première des équations (37) donne

$$\frac{R^2 fg}{R_1 R_2}+\left(f+\frac{da}{du}+\frac{df}{g dv}b\right)\left(g+\frac{db}{dv}+a\frac{dg}{f du}\right)$$
$$-\left(\frac{db}{du}-\frac{df}{g dv}a\right)\left(\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f du}b\right)=0:$$

de telle sorte que cette dernière équation équivaut à la relation géométrique

$$R^2=-Z_1 Z_2.$$

Mais si ζ désigne la distance d'un point de l'enveloppe de sphères au plan XOY, on a vu que

$$R^2=-\zeta^2;$$

on a donc définitivement

$$\zeta^2-Z_1 Z_2=0\ (^1),$$

150. *Équation différentielle du problème et définitive. Intégration dans le cas où* (O) *est développable*. — Il faut aussi former l'équation différentielle des systèmes cycliques. Prenons les coordonnées symétriques imaginaires, nous aurons immédiatement (d'après les formules du n° **66**),

$$(38)\qquad 4\zeta^2\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2\left[(1+2c)^2-4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\right]=0.$$

$$\zeta^2=-(2Z+4\lambda^2 ab);$$

(1) Le Mémoire original donnait dans cette dernière équation le signe + au lieu du signe —.

a, b, c ont les significations habituelles :

$$a = \frac{dZ}{\lambda^2 dx}, \qquad b = \frac{dZ}{\lambda^2 dy},$$
$$c = \frac{d^2 Z}{\lambda^2 dx\, dy}.$$

On ne peut songer à intégrer (38) d'une façon générale, le problème étant du même ordre que celui de la recherche de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée. Montrons seulement comment on intègre lorsque la surface (O) est développable. Dans ce cas, l'équation se réduit à

$$(1 + 2c)^2 - 4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy} = 0\ (^1);$$

on peut toujours supposer que le λ est égal à l'unité puisque la surface est applicable sur le plan ; par conséquent, il vient simplement

$$\left(1 + 2\frac{d^2 Z}{dx\, dy}\right)^2 - 4\frac{d^2 Z}{dx^2}\frac{d^2 Z}{dy^2} = 0.$$

Posons

$$Z + \frac{xy}{2} = z,$$

et l'équation se ramène à la forme bien connue

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\, dy}\right)^2 - \frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

dont l'intégrale s'obtiendrait en éliminant le paramètre α entre les équations

$$z = \alpha x + f(\alpha) y - F(\alpha),$$
$$0 = x + f'(\alpha) y - F'(\alpha).$$

(1) L'intégration de cette équation a été faite par M. Tresca, ingénieur des Ponts et Chaussées, auquel nous avions communiqué l'équation générale des systèmes cycliques.

151. *Interprétation géométrique de l'intégrale précédente.* — Il est fort facile maintenant d'interpréter ces résultats. Remarquons que l'on a, en passant aux coordonnées rectangulaires u et v pour lesquelles

$$x + iy = u, \qquad x - iy = v,$$

$$z = u[\alpha - if(\alpha)] + v[\alpha + if(\alpha)] - F(\alpha),$$

$$0 = u[1 - if'(\alpha)] + v[1 + if'(\alpha)] - F'(\alpha),$$

enfin

$$Z = z - \frac{u^2 + v^2}{2};$$

u et v sont les coordonnées rectangulaires du point O, centre de la sphère de rayon $\sqrt{-2Z}$. Calculons les coordonnées d'un des points de l'enveloppe des sphères; d'après la théorie qui précède, elles sont, relativement à la nouvelle origine,

$$\xi = u + \frac{dZ}{du}, \qquad \eta = v + \frac{dZ}{dv},$$

$$\zeta = \sqrt{-\left[2Z + \left(\frac{dZ}{du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dv}\right)^2\right]};$$

mais l'équation en z peut s'écrire

$$z = u\beta + v\varphi(\beta) - \Phi(\beta),$$

$$0 = u \quad + v\varphi'(\beta) - \Phi'(\beta);$$

on en déduit sans peine

$$\xi = \beta, \qquad \eta = \varphi(\beta),$$

(39) $$\zeta^2 + \beta^2 + \varphi(\beta)^2 = 2\Phi(\beta).$$

Ainsi les coordonnées de l'enveloppe sont des fonctions d'un même paramètre; donc *chacune des nappes de cette enveloppe se réduit à une courbe gauche, si l'on suppose* (O) *aplanie.*

152. *Définition directe et sans imaginaires des systèmes cycliques dont les plans enveloppent une développable.* — Mais ceci ne suffit

pas, car à chaque point de la courbe gauche correspond un cercle, et pourtant il y a une infinité de points, tels que O, qu'il faut considérer comme associés au même cercle. Quel est le lien qui existe entre les points et l'un des cercles? C'est ce qu'il s'agit d'établir. Géométriquement on voit bien que tous les points O correspondant à un point M de la courbe gauche (M) doivent être rangés sur la trace du plan normal à (M), et analytiquement on voit que l'équation du lieu de ces points O est

$$u + v\varphi'(\beta) - \Phi'(\beta) = 0;$$

mais lorsque la courbe gauche est imaginaire (ce qui est le cas intéressant, puisqu'alors seulement les cercles sont réels), comment la droite lieu des points O est-elle liée aux cercles? R^2 est égal au carré du ζ du point M changé de signe; donc, en vertu de l'équation (39), celle du cercle image du point M est

$$u^2 + v^2 - 2u\beta - 2v\varphi(\beta) = -2\Phi(\beta),$$

et si l'on cherche la corde de contact, lorsque β varie, il vient

$$u + v\varphi'(\beta) - \Phi'(\beta) = 0,$$

ce qui est précisément la droite lieu des points O associés au cercle image du point M.

En résumé, *pour obtenir le système cyclique le plus général, admettant comme enveloppe une surface développable, il faut tracer dans un plan une enveloppe de cercles arbitraire, mener toutes les cordes de contact, puis enrouler le plan comme on veut et faire correspondre à chaque point d'une corde de contact le cercle qui lui a donné naissance.*

133. *L'équation différentielle des surfaces trajectoires des courbes planes est indépendante de la forme de* (O). *Propriétés complémentaires du système cyclique à cercles identiques.* — Il n'a certainement pas échappé que l'équation donnée au n° **120**, des surfaces trajectoires d'une famille de courbes planes, est indépendante de la forme de la surface (O), de telle sorte que, si l'on a intégré les trajec-

toires pour une forme de (O), cette intégrale convient à toutes les formes. Dans le cas particulier que nous venons de traiter, les surfaces trajectoires des cercles se réduisent, à la limite, aux courbes trajectoires orthogonales des cercles tracés dans le plan.

Il convient aussi de signaler que, lorsqu'un système cyclique est formé de cercles identiques, les surfaces trajectoires sont toutes applicables sur une surface de révolution. Dans ce cas, on a, en effet,

$$A = K\cos\varphi, \qquad B = K\sin\varphi,$$
$$G = \cos\varphi, \qquad H = g\sin\varphi,$$
$$G' = -\sin\varphi, \qquad H' = g\cos\varphi,$$
$$f = 1, \qquad \frac{dg}{g\,du} = \frac{1}{K}.$$

L'équation qui donne les du et dv des lignes principales doit être la même pour tous les points du cercle, puisque tout système cyclique est triplement orthogonal; au demeurant, en substituant les valeurs qui précèdent dans l'équation du n° **122**, il vient

$$du^2 D + du\,dv(Pg + Q) + dv^2 g^2 D = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation des lignes de courbure de (O); mais l'on sait que, dans un système cyclique, le lieu des foyers des faisceaux formés par les normales aux surfaces trajectoires se compose de deux diamètres conjugués, tangents aux directions qu'il faut suivre pour que les cercles soient lignes de courbure sur les surfaces élémentaires correspondantes. Dans le cas présent, comme l'angle de ces diamètres est droit, puisqu'ils sont dirigés suivant les tangentes principales à (O), il est clair que le produit des rayons de courbure principaux sur chacune des surfaces trajectoires est égal au carré du rayon constant des cercles, changé de signe. Ce qui précède complète ce que nous avions à exposer au sujet de ce système cyclique si bizarre. Pour résumer ses propriétés, nous dirons : *Le système cyclique dérivé de cercles identiques admet pour trajectoires des surfaces applicables sur la surface enveloppe du plan des cercles et sur la surface de*

révolution ayant pour méridienne la tractrice. Sur toutes ces surfaces, les lignes de courbure se correspondent.

134. *Intégration des systèmes cycliques lorsque la surface enveloppe des plans est un point. Dans ce cas ils sont toujours orthogonaux à une sphère fixe.* — L'équation des systèmes cycliques s'intègre aussi dans un cas autre que celui des surfaces développables, c'est lorsque la surface enveloppe (O) se réduit à un point. Dans ce cas la formule (38) disparaît; mais il est facile de la préparer, de telle sorte qu'elle donne encore la solution du problème.

Supposons d'abord que (O) soit une sphère, on a, si K désigne le rayon,

$$4K^2\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2=0,$$

et l'équation des systèmes cycliques est

$$0=-4\left(2Z+4\frac{dZ}{dx}\frac{dZ}{dy}\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2 \times\left[\left(1+2\frac{d^2Z}{\lambda^2\,dx\,dy}\right)^2-4\frac{d}{dx}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dy}\right)\right].$$

Considérons la sphère de rayon unité et exprimons tout en fonction de ses éléments, images semblables à ceux de la sphère considérée, et aussi en fonction du rayon de cette sphère. Il suffit manifestement de remplacer λ par λK (où λ est relatif à la sphère image).

L'équation du problème peut donc s'écrire

$$-4\left(2ZK^2+4\frac{dZ}{dx}\frac{dZ}{dy}\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2 \times\left[\left(K^2+2\frac{d^2Z}{\lambda^2\,dx\,dy}\right)^2-4\frac{d}{dx}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dy}\right)\right]=0$$

avec

$$4\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2=0;$$

si l'on passe à la limite, K devient nul; il reste

$$\frac{dZ}{dx}\frac{dZ}{dy}+\lambda^2\left[\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d}{dx}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dy}\right)\right]=0,$$

mais on ignore ce qu'est au juste la fonction Z. Il convient de remonter à l'origine de la question. Supposons que (O) soit une sphère dont le rayon K tende vers zéro, et prolongeons à chaque instant les normales à (O) jusqu'à la rencontre de la sphère de rayon unité qui lui est concentrique. Prenons également sur cette sphère des axes instantanés parallèles à ceux qui pivotent autour de (O). Soient a, b, R les quantités qui définissent le système cyclique; il est clair que a et b sont à la fois les coordonnées du centre du cercle par rapport aux deux systèmes d'axes. Il faut remplacer f et g par $\mathrm{K}f$, $\mathrm{K}g$ et $\mathrm{R}_1\,\mathrm{R}_2$ par K^2. Dans ces conditions, les équations du n° **127** deviennent

$$\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{du} - a\frac{da}{du} - b\frac{db}{du} = a\mathrm{K}f,$$

$$\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{dv} - a\frac{da}{dv} - b\frac{db}{dv} = b\mathrm{K}g,$$

et celle du n° **129** donne

$$\mathrm{R}^2 fg + \left(\mathrm{K}f + \frac{da}{du} + \frac{df}{g\,dv}b\right)\left(\mathrm{K}g + \frac{db}{dv} + \frac{dg}{f\,du}a\right) - \left(\frac{db}{du} - \frac{df}{g\,dv}a\right)\left(\frac{da}{dv} - \frac{dg}{f\,du}b\right) = 0.$$

Si l'on passe à la limite, il vient

$$\mathrm{R}^2 = a^2 + b^2 - \mathrm{C}^2, \tag{40}$$

où C désigne une quantité constante (et cette équation remplace les deux premières du système primitif), puis

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{R}^2 fg + \frac{dg}{f\,du}\left(a\frac{da}{du} + b\frac{db}{du}\right) \\ &\qquad + \frac{df}{g\,dv}\left(a\frac{da}{dv} + b\frac{db}{dv}\right) + \frac{da}{du}\frac{db}{dv} - \frac{db}{du}\frac{da}{dv} = 0. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

L'équation (40) exprime que tous ces cercles sont normaux à la sphère de rayon C qui a pour centre celui de la sphère de rayon unité. Ce résultat découle aussi à première vue de l'intégrale géomé-

trique, car ici les sphères auxiliaires ayant même centre doivent coïncider toutes; on doit donc avoir

$$a^2+b^2+\zeta^2=C^2,$$

et puisque généralement

$$\zeta^2=-R^2,$$

on trouve l'équation (40).

Ainsi : *Lorsqu'un système cyclique est tel que les plans de tous ses cercles passent par un point fixe, chacun des cercles est orthogonal à une sphère fixe ayant ce point fixe pour centre.*

155. *Sur l'intégration analytique du problème.* — Il faut encore intégrer l'équation (41) pour obtenir le système cyclique le plus général; mais, géométriquement, on sait que le problème est résolu, attendu qu'il suffit de se donner une des surfaces trajectoires du système, et qu'on peut la prendre arbitrairement, ainsi qu'il a été démontré au nº **106**.

On peut désirer arriver par l'équation (41) elle-même au résultat que nous venons d'énoncer.

Soient en général ξ et η les coordonnées d'un point M situé dans le plan tangent de la surface de référence et tel que le plan tangent à (M) soit perpendiculaire à celui des XY, et fasse, par exemple, l'angle φ avec l'axe des X, on doit avoir manifestement et quels que soient du et dv,

$$-\Delta X\sin\varphi+\Delta Y\cos\varphi=0,$$

et, d'après nos formules (F), ceci revient à

$$-\sin\varphi\left(f+\frac{d\xi}{du}+\frac{df}{g\,dv}\eta\right)+\cos\varphi\left(\frac{d\eta}{du}-\frac{df}{g\,dv}\xi\right)=0,$$

$$-\sin\varphi\left(\frac{d\eta}{du}-\frac{df}{g\,dv}\xi\right)+\cos\varphi\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\xi\right)=0.$$

L'équation d'un cercle de rayon R et normal à chaque instant à (M) est

$$\begin{aligned}X^2+Y^2+\xi^2+\eta^2-2R(\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi)\\-2X(\xi-R\cos\varphi)-2Y(\eta-R\sin\varphi)=0.\end{aligned}$$

La puissance du point O, par rapport à ce cercle, est donc, en général,

$$-2Z = \xi^2 + \eta^2 - 2R(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi),$$

et les coordonnées du centre sont

$$a = \xi - R\cos\varphi, \qquad b = \eta - R\sin\varphi.$$

Conséquemment, dans le cas où (O) se réduit à un point, nous savons d'avance que l'intégrale du problème est représentée par le système suivant d'équations simultanées

$$a = \xi - R\cos\varphi, \qquad b = \eta - R\sin\varphi,$$

$$C^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2R(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi),$$

$$-\sin\varphi\left(\frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right) + \cos\varphi\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) = 0,$$

$$-\sin\varphi\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) + \cos\varphi\left(\frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) = 0.$$

La vérification analytique se fait sans difficulté.

156. Nous devrions encore ramener le problème à ne dépendre que d'une seule équation aux différentielles partielles du second ordre, dont l'intégrale serait, par cela même, implicitement trouvée : celle du n° **154** y répond ; on pourrait ainsi faire des rapprochements intéressants, mais nous avons déjà trop insisté sur ces questions de détail.

Le Chapitre que nous terminons devrait être bien plus développé ; il pourrait comprendre, par exemple, la recherche des courbes algébriques trajectoires orthogonales de surfaces ; mais, ainsi étendu, il devrait faire l'objet d'un travail spécial.

CONCLUSIONS.

157. Notre but, dans le Mémoire que nous venons de rédiger, a été de montrer avec quelle facilité la Géométrie autour des surfaces permet d'aborder des questions, même très complexes ; nous souhai-

tons que les applications choisies paraissent dignes d'intérêt et d'études spéciales, mais nous aurons surtout atteint notre but, si l'on reconnaît qu'en effectuant autour des surfaces des constructions tout intégrées on peut créer une véritable Géométrie analytique qui marque un certain progrès dans la marche continuelle des opérations mathématiques.

Nous aurions voulu ajouter à ce qui précède des Chapitres sur la recherche des couples de surfaces applicables, sur le mouvement d'un corps assujetti à quatre conditions, mais le temps nous fait absolument défaut; nous comptons les adresser prochainement à l'Institut, si nos recherches mathématiques actuelles y trouvent un accueil favorable.

Draguignan, 30 mai 1876.

NOTE.

Le Mémoire qui précède a été présenté à l'Académie des Sciences pour le prix Dalmont; il a fait l'objet d'un Rapport de M. de la Gournerie (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXXIV, p. 811).

Paris, 23 mars 1890.

Note sur quelques effets des tremblements de terre;

PAR M. CELLERIER.

§ 1. — Cas les plus simples.

1. CAS D'UN PENDULE COMPOSÉ DONT L'AXE DE SUSPENSION ÉPROUVE UNE SECOUSSE HORIZONTALE. — Le plan de la figure est mené par le centre de gravité G du corps, perpendiculairement à l'axe de suspen-

Fig. 1.



sion qu'il coupe en O : m est la masse du corps, C son moment d'inertie par rapport à l'axe, h la distance OG, l la longueur réduite OL du pendule, de sorte que $C = mhl$, θ est l'angle d'écart de la verticale, compté positif à droite.

Le temps t est compté à partir du commencement de la secousse; le mouvement relatif au système des appuis et des objets environnants se calculera comme si ce système était immobile, en supposant appliquée en tout point du corps mobile une accélération égale et contraire à celle du système, ou de l'axe; la composante de celle-ci perpendiculaire au plan de la figure étant détruite, l'accélération à appliquer,

parallèle au plan de la figure horizontale, et dirigée à droite sera

$$\frac{d^2u}{dt^2},$$

u étant le déplacement horizontal du point O dans le plan de la figure, compté positif à gauche; ainsi u est une fonction donnée de t, nulle de même que $\frac{du}{dt}$ quand $t=0$. L'accélération imprimée au corps équivaut à une force $m\frac{d^2u}{dt^2}$ appliquée au point G. L'équation du mouvement est ainsi

$$C\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgh\sin\theta+mh\frac{d^2u}{dt^2};$$

en négligeant θ^3 ou remplaçant $\sin\theta$ par θ, substituant $C=mhl$, divisant par mh, posant

$$\mu=\sqrt{\frac{g}{l}},\qquad l\theta=x,$$

l'équation devient

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\mu^2x+\frac{d^2u}{dt^2},$$

et x est le déplacement du point L, pris positif à droite. L'intégrale est

$$x=-\frac{\cos\mu t}{\mu}\int_0^t\frac{d^2u}{dt^2}\sin\mu t\,dt$$
$$+\frac{\sin\mu t}{\mu}\int_0^t\frac{d^2u}{dt^2}\cos\mu t\,dt+A\cos\mu t+B\sin\mu t.$$

On suppose que, pour $t=0$, le corps était en repos; on avait

$$x=0,\qquad \frac{dx}{dt}=0,$$

les deux premiers termes de x et leurs dérivées se détruisant quand $t=0$, il en résulte que les constantes arbitraires A et B sont nulles. En intégrant par partie $\frac{d^2u}{dt^2}$, et remarquant que $\frac{du}{dt}=0$ pour $t=0$,

les termes hors du signe $\int$ se détruisent, et il reste

$$x = \cos\mu t \int_0^t \frac{du}{dt} \cos\mu t\, dt + \sin\mu t \int_0^t \frac{du}{dt} \sin\mu t\, dt,$$

ou plus simplement

$$x = \int_0^t \frac{du'}{dt'} \cos\mu(t - t')\, dt',$$

u' étant ce que devient u quand on y remplace t par t'.

Discussion du résultat précédent. — Quel que soit le mode de variation de u' en fonction de t', on peut partager l'ensemble de la secousse en mouvements simples, c'est-à-dire tels que, pendant chacun d'eux, le point O se déplace dans un même sens, ou que u' soit toujours croissant ou décroissant, et $\frac{du'}{dt'}$ de signe constant. La valeur de x est la somme des portions de l'intégrale correspondant à chaque mouvement simple; elle ne dépend d'ailleurs que de $\frac{du'}{dt'}$, et ne changera pas si, pour chacun, nous considérons le point O comme partant de sa position primitive, en conservant à $\frac{du'}{dt'}$ sa valeur exacte.

Ainsi x est la somme des valeurs particulières correspondant à chaque mouvement simple considéré comme secousse unique, les secousses commençant pour des valeurs diverses de t'.

Pour un mouvement simple d'excursion h, on aura évidemment un maximum numérique de la valeur (2) de x en remplaçant $\cos\mu(t - t')$ par l'unité, puisque $\frac{du'}{dt'}$ a un signe constant; le résultat sera

$$\int \frac{du'}{dt'} \quad \text{ou} \quad h.$$

Ce maximum ne pourra être atteint que si $\cos\mu(t - t')$ ne varie pas sensiblement pendant la durée θ du mouvement, et comme $\mu = \frac{\pi}{T}$,

T étant la durée de l'oscillation pendulaire, il faut pour cela que $\frac{\theta}{T}$ soit très petit. Cette condition sera d'ailleurs suffisante, car on peut toujours supposer t tel que $\mu(t - t')$ pendant le temps θ soit sensiblement multiple de π; t croissant, x variera à très peu près entre $\pm h$, et h sera, pour le point L, l'excursion du mouvement pendulaire qui suit la secousse. Ce résultat était facile à prévoir. Le déplacement h du point O étant brusque, le point L reste en arrière, ayant ainsi un déplacement relatif h, qui sert de position initiale pour le mouvement pendulaire. Dans le cas où la durée θ du mouvement est plus grande, on ne peut dire, d'une manière générale, que x sera notablement inférieur à h, car il peut toujours arriver que $\cos\mu(t - t')$ reste presque constant pendant une notable partie du mouvement, ou que celui-ci soit presque soudain.

Mais, s'il n'en est pas ainsi, x sera toujours inférieur à h, et même, si θ est très grand par rapport à T, la valeur (2) de x sera constamment très petite par rapport à h; en effet, nous supposons le mouvement lent sans se trouver accumulé sur une faible portion de la durée totale, et, pendant celle-ci, $\cos\mu(t - t')$ changera de signe un grand nombre de fois; les portions correspondantes de l'intégrale (2) se détruiront en partie, et le tout sera très petit par rapport à

$$\int \frac{du'}{dt'} \quad \text{ou} \quad h.$$

Si, pour d'autres mouvements simples, l'excursion du point O est

$$h', \quad h'', \quad h''', \quad \ldots,$$

ce seront les maxima théoriques de x pour chacun d'eux, et de la sorte pour leur ensemble le maximum théorique de x serait leur somme

$$h + h' + h'' + \ldots.$$

Mais cela suppose une série de plus en plus improbable de coïncidences; pour deux mouvements cela supposerait qu'à la fois

$$\cos\mu(t - t')$$

fût ± 1 pendant la durée du premier et ∓ 1 pendant celle du second, où $\frac{du'}{dt'}$ est de signe contraire, ou que les deux secousses fussent presque instantanées se suivant à un intervalle de temps égal à T. Il en serait de même quand il y a plus de deux mouvements simples.

Ces cas anormaux ont donc peu d'importance et, puisque l'effet d'un nombre quelconque de secousses se trouve en calculant celui d'une seule, il suffit d'examiner, soit le cas d'une seule comme nous venons de le faire, soit celui d'une *secousse complète*, en désignant ainsi le mouvement formé d'une excursion h du point O à gauche, suivi de son retour à sa position primitive.

Cas d'une secousse complète. — Désignons par θ sa durée totale : si $\theta > T$ ou $\mu\theta > \pi$, il est clair que le mouvement pourra présenter les circonstances anormales déjà mentionnées et que x pourra atteindre à peu près $2h$. Bornons-nous donc au cas où $\theta < T$, qui est le plus important. Il faut distinguer ce qui se passe pendant la secousse et dans le mouvement qui lui succède.

1° *Valeur de x pendant la secousse.* — Tout ce qu'on peut dire de général quand $\theta < T$, c'est que, pendant la première période de la secousse, x peut approcher beaucoup de h si elle est courte, mais que, pendant la seconde, il restera inférieur à $2h$ numériquement. Le résultat est plus simple si $\theta < \frac{1}{2}T$, car alors $\mu t'$ n'atteindra pas $\frac{1}{2}\pi$, non plus que $\mu(t-t')$; l'intégrale (2) pendant la seconde période de la secousse est ainsi composée de deux parties de signe contraire, toutes deux numériquement inférieures à h; en outre, dans la seconde, le même accroissement du' est multiplié par un cosinus plus fort, $\mu(t-t')$ diminuant. Il en résulte que, pendant la secousse, x est compris entre $\pm h$ et qu'à la fin il est négatif.

2° *Valeur de x après la secousse.* — Soient θ', $\theta - \theta'$ les durées des deux périodes du mouvement et H, H' les portions correspondantes de l'intégrale (2) où $t > \theta$. Dans la première, $\mu(t-t')$ décroît de μt à $\mu(t-\theta')$ et, en remplaçant tour à tour $\cos\mu(t-t')$ par sa valeur la plus grande et la plus petite (algébriquement) dans cet inter-

valle, on aurait des limites entre lesquelles H est comprise, d'où résulte

$$H = \cos i \int \frac{du'}{dt'} = h \cos i,$$

i étant compris entre μt et $\mu t - \mu\theta'$. De même

$$H' = \cos i' \int \frac{du'}{dt'} = -h \cos i',$$

i' étant compris entre $\mu(t-\theta')$ et $\mu(t-\theta)$; de la sorte $i - i'$ est compris entre o et $\mu\theta$ ou $\frac{\pi\theta}{T}$. La valeur complète de x est ainsi

$$x = H + H' = h(\cos i - \cos i') = -2h \sin \frac{i+i'}{2} \sin \frac{i-i'}{2}.$$

On aura donc constamment, numériquement,

$$x < 2h \sin \frac{\pi\theta}{2T}.$$

Si donc $\theta < \frac{1}{2}T$, $x < h\sqrt{2}$, et si $\frac{\theta}{T}$ est très petit, bien que, pendant la secousse, x atteigne à peu près la valeur h, $\frac{x}{h}$ sera toujours très petit dans le mouvement qui lui succède, la seconde période de la secousse détruisant en grande partie l'effet de la première.

On pourrait avec quelque probabilité attribuer à la secousse la loi ordinaire des oscillations, en posant

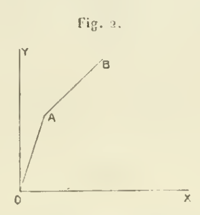
$$u' = \frac{1}{2}h(1 - \cos\mu' t');$$

de la sorte u' et $\frac{du'}{dt'}$ seraient nulles pour $t' = 0$ et le redeviendraient quand $t' = \frac{2\pi}{\mu'}$. On pourrait ainsi chercher à déduire de l'observation du mouvement les valeurs de h et de μ' et la durée $\frac{2\pi}{\mu'}$ de la secousse. Toutefois le résultat est d'une grande complication et ne pourrait s'obtenir qu'en construisant des Tables numériques étendues.

On ne pourrait d'ailleurs lui attribuer une grande précision, la fonction $\acute{u}'$ pouvant contenir plusieurs termes analogues au précédent.

2. Cas de deux tiges articulées. *Équations du mouvement.* — Le système se compose de deux tiges OA, AB, que nous rapportons aux axes OX, OY, dont le second est vertical. Les tiges, que nous

Fig. 2.



assimilons à des droites ont la même masse m, la même longueur l, et ne peuvent se mouvoir que dans un plan vertical; elles sont articulées entre elles en A, et la première l'est en outre, au sol, en O. Leurs angles avec la verticale sont θ pour OA, et $\theta + \theta'$ pour AB; θ et θ' sont comptés positivement à droite. Le mouvement est déterminé par une secousse dans laquelle le sol éprouve une translation horizontale; u, connu en fonction de t, est le déplacement du point O, sur l'axe des x, considéré comme positif du côté des x négatives. Nous admettons que, dans l'articulation O, s'exercent des forces dont le moment par rapport à O est numériquement $\frac{1}{2}lmb\theta$ et qui tendent à ramener OA dans la position verticale. De même, dans l'articulation A, agissent sur AB des forces tendant à diminuer θ' ou à amener AB en droite ligne avec OA; leur moment par rapport à A est $\frac{1}{2}mlb'\theta'$.

Les axes étant entraînés dans le mouvement du point O, le mouvement relatif des tiges est le même que si les axes étaient immobiles, en supposant tous les points des tiges animés, outre les forces réelles, d'une accélération commune $\frac{d^2u}{dt^2}$ parallèle à OX et de même sens.

Les équations du mouvement sont celles de Lagrange, ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta''}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\right) = \mathrm{K}, \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'''}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'}\right) = \mathrm{K}',$$

en remarquant que la position du système ne dépend que des deux variables θ, θ', désignant par $\mathrm{K}\,d\theta + \mathrm{K}'\,d\theta'$ le travail des forces pour un petit déplacement, par T la force vive totale, et posant

$$\theta'' = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \theta''' = \frac{d\theta'}{dt}.$$

Valeur de T. — Pour un élément dr de OA, à la distance r de O, les coordonnées sont

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

la masse de l'élément est

$$\frac{m\,dr}{l},$$

et sa force vive

$$\frac{m}{l}\,r^2\,dr\,\frac{d\theta^2}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{l}\,\theta''^2\,r^2\,dr.$$

Pour un élément dr de AB à la distance r de A, la masse est

$$\frac{m\,dr}{l},$$

les coordonnées

$$x = l\sin\theta + r\sin(\theta + \theta'), \qquad y = l\cos\theta + r\cos(\theta + \theta')$$

et la force vive

$$\frac{m\,dr}{l}\left[l^2\theta''^2 + r^2(\theta'' + \theta''')^2 + 2lr\theta''(\theta'' + \theta''')\cos\theta'\right].$$

En intégrant ces deux forces vives de $r = 0$ à l, on aura en tout

$$\mathrm{T} = ml^2\left[\tfrac{1}{3}\theta''^2 + \theta''^2 + \tfrac{1}{3}(\theta'' + \theta''')^2 + \theta''(\theta'' + \theta''')\cos\theta'\right].$$

Nous négligerons les termes du troisième degré par rapport aux petits nombres θ, θ', θ'', θ'''. Nous devrons donc, dans les équations du mouvement, supprimer $\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'}\right)$ et, dans les autres dérivées partielles

de T, remplacer $\cos\theta'$ par l'unité, d'où résulte

$$T = \frac{ml^2}{3}(8\theta''^2 + 5\theta''\theta''' + \theta''^2).$$

Valeurs de K *et* K'. — Puisque $K\,d\theta + K'\,d\theta'$ est le travail des forces, $K'\,d\theta'$ est ce travail en supposant θ constant, ou la tige OA immobile; ainsi K' est la somme des moments des forces agissant sur AB par rapport au point A. De même, $K\,d\theta$ est le travail en supposant θ' constant, ou le système OAB de forme invariable. Ainsi K est la somme des moments des forces agissant sur les deux tiges, par rapport au point O. Il ne s'agit que des forces extérieures, et celles qui agissent dans l'articulation A n'y sont pas comprises. Tous les moments doivent être pris positifs s'ils tendent à augmenter θ' ou θ, ou à faire tourner de OY vers OX.

Les moments des forces exercées dans les articulations sont $-\frac{1}{2}mlb\theta$ pour K, et $-\frac{1}{2}mlb'\theta'$ pour K'. L'accélération $\frac{d^2u}{dt^2}$, que nous désignerons par u'', équivaut à une force mu'' agissant sur le centre de gravité dx, c'est-à-dire le milieu de chaque tige, dans le sens OX; le poids mg agit sur les mêmes points. Leurs moments réunis sont évidemment $mu''y + mgx$, x et y étant les coordonnées du point; celles-ci pour K' se rapportent à l'origine A, ce qui donne pour le moment

$$\tfrac{1}{2}mu''l\cos(\theta+\theta') + \tfrac{1}{2}mgl\sin(\theta+\theta').$$

Dans la valeur de K, l'origine est en O, ce qui donne, pour le moment des forces appliquées au milieu de OA,

$$\tfrac{1}{2}mu''l\cos\theta + \tfrac{1}{2}mgl\sin\theta.$$

Pour le milieu de AB, on aura de même

$$mu''[l\cos\theta + \tfrac{1}{2}l\cos(\theta+\theta')] + mg[l\sin\theta + \tfrac{1}{2}l\sin(\theta+\theta')].$$

En négligeant le troisième degré, nous devons remplacer les sinus par les angles. En outre, θ et θ' sont de l'ordre de u'' qui doit ainsi être

regardé comme du premier degré; on doit donc remplacer aussi les cosinus par l'unité. En substituant dans les formules de Lagrange la valeur de T et toutes les parties de K, K' que nous venons de trouver, on aura, avant toute réduction,

$$\frac{ml^2}{6}\left(16\frac{d\theta''}{dt}+5\frac{d\theta'''}{dt}\right)=-\tfrac{1}{2}mlb\theta+\tfrac{1}{2}ml(u''+g\theta)$$
$$+m[u''(l+\tfrac{1}{2}l)+g(l\theta+\tfrac{1}{2}l\theta+\tfrac{1}{2}l\theta'),$$
$$\frac{ml^2}{6}\left(5\frac{d\theta''}{dt}+2\frac{d\theta'''}{dt}\right)=-\tfrac{1}{2}mlb'\theta'+\tfrac{1}{2}mu''l+\tfrac{1}{2}mgl(\theta+\theta'),$$

ou, en divisant par $\frac{1}{2}ml$,

$$\frac{l}{3}\frac{d^2(16\theta+5\theta')}{dt^2}+(b-4g)\theta-g\theta'-4u''=0,$$
$$\frac{l}{3}\frac{d^2(5\theta+2\theta')}{dt^2}-g\theta+(b'-g)\theta'-u''=0.$$

En posant

$$(3)\qquad b-4g=a,\qquad b'-g=a',$$

ces équations prennent la forme plus simple

$$(4)\qquad \begin{cases}\dfrac{l}{3}\dfrac{d^2(16\theta+5\theta')}{dt^2}+a\theta-g\theta'-4u''=0,\\[2ex] \dfrac{l}{3}\dfrac{d^2(5\theta+2\theta')}{dt^2}-g\theta+a'\theta'-u''=0.\end{cases}$$

5. Intégration des équations précédentes. — Ajoutons à la première le produit de la seconde par une indéterminée f et posons

$$(5)\qquad p=(16+5f)\theta+(5+2f)\theta'.$$

Nous aurons

$$\frac{l}{3}\frac{d^2p}{dt^2}+(a-gf)\theta+(a'f-g)\theta'=(4+f)u''.$$

Choisissons f de façon que l'on ait

$$(6) \qquad \frac{a - gf}{16 + 5f} = \frac{a'f - g}{5 + 2f}.$$

En désignant par z la valeur commune de ces deux rapports, l'équation deviendra alors

$$\frac{l}{3}\frac{d^2p}{dt^2} + zp = (4 + f)u'' \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2p}{dt^2} + \mu^2 p = \frac{3}{l}(4 + f)u'',$$

en posant

$$(7) \qquad \frac{3z}{l} = \mu.$$

Si μ est réelle, l'équation s'intègre comme celle du n° **1**; en remarquant que p et $\frac{dp}{dt}$ s'annulent pour $t = 0$, le système étant vertical et immobile au commencement de la secousse, les constantes arbitraires A, B disparaissent, et l'on trouve

$$(8) \qquad p = \frac{3(4 + f)}{l} q, \qquad q = \int_0^t \frac{du'}{dt'} \cos \mu (t - t')\, dt',$$

u' étant ce que devient u quand on y remplace t par t'. Si μ est imaginaire, la valeur de p contient des exponentielles, et le mouvement, même en l'absence de l'accélération u'', est instable.

Pour que f satisfasse à l'équation (6), il faut et il suffit que, pour un même nombre z, on ait à la fois

$$\frac{a - gf}{16 + 5f} = z, \qquad \frac{a'f - g}{5 + 2f} = z$$

ou

$$(9) \qquad f = \frac{a - 16z}{5z + g}, \qquad f = \frac{5z + g}{a' - 2z},$$

d'où

$$(16z - a)(2z - a') - (5z + g)^2 = 0$$

ou

$$(10)\quad \begin{cases} 7z^2 - 2z(a + 8a' + 5g) + aa' - g^2 = 0, \\ z = \dfrac{a + 8a' + 5g \pm \sqrt{R}}{7}, \\ R = (a + 8a' + 5g)^2 - 7(aa' - g^2). \end{cases}$$

Il faut remarquer que

$$R = 32g^2 + 10g(a + 8a') + (a + 8a')^2 - 7aa'$$

ou

$$32R = [5(a + 8a') + 32]^2 + 7(a - 8a')^2.$$

Les valeurs de z sont donc réelles et inégales.

Désignons par z, z' les deux racines, et par μ', f', p', q' ce que deviennent μ, f, p, q, quand on y remplace z par z'. D'après la valeur (5) de p, on a

$$16\theta + 5\theta' + f(5\theta + 2\theta') = p, \qquad 16\theta + 5\theta' + f'(5\theta + 2\theta') = p',$$

d'où

$$5\theta + 2\theta' = \frac{p - p'}{f - f'}, \qquad 16\theta + 5\theta' = \frac{fp' - f'p}{f - f'}.$$

On en tirerait θ et θ'; mais nous avons surtout besoin de connaître le mouvement du point B pour lequel

$$x = l\sin\theta + l\sin(\theta + \theta'), \qquad y = l\cos\theta + l\cos(\theta + \theta').$$

La valeur de y est à peu près constante et égale à $2l$; celle de x, en négligeant le troisième degré, est

$$x = l(2\theta + \theta').$$

En ajoutant les deux relations ci-dessus, multipliées par $\frac{6}{7}$ et $-\frac{1}{7}$, on aura

$$2\theta + \theta' \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{l} = \frac{(6 + f')p - (6 + f)p'}{7(f - f')}$$

et, en substituant la valeur (8) de p et son analogue pour p',

$$\frac{7x}{3} = \frac{(4+f)(6+f')q - (4+f')(6+f)q'}{f-f'}.$$

On peut l'écrire

$$(11)\qquad \frac{7x}{3} = q + q' + \mathrm{H}(q - q'),$$

où

$$\mathrm{H} = \frac{(5+f)(5+f') - 1}{f - f'}.$$

En y substituant, d'après les formules (9),

$$f = \frac{5z+g}{a'-2z}, \qquad f' = \frac{5z'+g}{a'-2z'},$$

on aura, avant les réductions,

$$\mathrm{H} = \frac{(5a'+g-5z)(5a'+g-5z') - (a'-2z)(a'-2z')}{(5z+g)(a'-2z') - (5z'+g)(a'-2z)}$$

ou

$$\mathrm{H} = \frac{24a'^2 + 10ga' + g^2 - (23a'+5g)(z+z') + 21zz'}{(5a'+2g)(z-z')}.$$

L'équation (10) donne

$$z + z' = \frac{2}{7}(a + 8a' + 5g), \qquad zz' = \frac{aa' - g^2}{7},$$

d'où

$$7\mathrm{H} = \frac{168a'^2 + 70ga' + 7g^2 + 21(aa' - g^2) - 2(23a'+5g)(a+8a'+5g)}{(5a'+2g)(z-z')}$$
$$= \frac{-5a(5a'+2g) - 8(25a'^2 + 30ga' + 8g^2)}{(5a'+2g)(z-z')} = -\frac{5a + 8(5a'+4g)}{z-z'}.$$

En outre, en supposant $z > z'$, les formules (10) donnent

$$z - z' = \tfrac{2}{7}\sqrt{\mathrm{R}};$$

la valeur (11), en remplaçant H par $-$ H′, devient ainsi

$$(12)\qquad \frac{7x}{3} = (\mathrm{H}' + 1)q' - (\mathrm{H}' - 1)q,$$

où

$$\mathrm{H}' = \frac{5(a + 8a') + 32g}{2\sqrt{\mathrm{R}}},$$

q, q' ayant la valeur (8) et une autre homologue. C'est l'intégrale sous sa forme la plus simple.

4. Discussion du résultat : 1° *Conditions de stabilité*. — Nous supposons stable la position verticale d'équilibre des tiges. Pour cela, z et z' étant réelles, comme on l'a vu, il faut de plus qu'elles soient positives et, pour cela, d'après les formules (10), que l'on ait

$$a + 8a' + 5g > 0, \qquad aa' - g^2 > 0.$$

La seconde condition exige que a et a' soient de même signe, et $g < \sqrt{aa'}$. On a d'ailleurs, quels que soient a, a',

$$a^2 + 64a'^2 - 9aa' > 0 \qquad \text{ou} \qquad (a + 8a')^2 > 25aa' > 25g^2.$$

Ainsi, numériquement, $a + 8a' > 5g$, et, si a et a' étaient toutes deux négatives, la condition $a + 8a' + 5g > 0$ ne serait pas satisfaite. Par conséquent, pour la stabilité de l'équilibre et celle du mouvement dû à la secousse, il faut et il suffit que a et a' soient toutes deux positives et que $g < \sqrt{aa'}$.

2° *Relation de grandeur entre* μ *et* μ'. — On a identiquement

$$32aa' = (a + 8a')^2 - (a - 8a')^2,$$

d'où

$$32(aa' - g^2) < (a + 8a' + 5g)^2,$$

ou, en multipliant par $\frac{4}{7}$,

$$128zz' < 7(z + z')^2$$

ou

$$32(z+z')^2 - 32(z-z')^2 < 7(z+z')^2,$$

$$5(z+z') < 4(z-z')\sqrt{2},$$

en remarquant que $z > z'$. Il en résulte

$$\frac{z}{z'} > \frac{5+4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-5} \quad \text{ou} \quad > \frac{57+40\sqrt{2}}{7} > 16,$$

$$\frac{\mu^2}{\mu'^2} > 16, \qquad \frac{\mu}{\mu'} > 4.$$

3° *Cas où les tiges se réduisent à une seule.* — Les formules trouvées comprennent ce cas en supposant infini le moment des forces qui tendent à amener la tige AB sur le prolongement de OA; nous devons donc faire croître à l'infini b' et, par suite, a' d'après les équations (3).

Les formules (10) montrent que z croît à l'infini; et, comme

$$\frac{zz'}{z+z'} = \frac{aa'-g^2}{2(a+8a'+5g)},$$

en désignant $\lim z'$ par z'', on a

$$z'' = \frac{a}{16}.$$

En même temps $\frac{8a'}{\sqrt{R}}$ converge vers 1, et la valeur (12) de H' vers $\frac{5}{2}$; μ étant infini, $q=0$, comme on le voit en intégrant $\cos\mu(t-t')\,dt'$ par partie dans la formule (8). En posant $\mu' = \sqrt{\frac{3z'}{l}} = \sqrt{\frac{3a}{16l}}$, désignant par q'', x'' les valeurs correspondantes de q, x, l'équation (12) se réduit à $x'' = \frac{3}{2}q''$.

4° *Discussion du cas général.* — En posant

$$5(a+8a')+32g = F,$$

les formules (10) donnent, comme on l'a vu,

$$32R = F^2 + 7(a-8a')^2.$$

Puisque a et a' sont positives

$$25(a-8a')^2 < F^2, \qquad 32R > F^2 \quad \text{et} \quad < F^2 + \tfrac{7}{25}F^2;$$

ainsi $\sqrt{R}$ est compris entre $\frac{F}{\sqrt{32}}$ et $\frac{F}{5}$. La valeur (12) de H′ est $\frac{F}{2\sqrt{R}}$; elle est donc comprise entre $\frac{5}{2}$ et $\sqrt{8}$, ou entre 2,5 et 2,82. Pour les évaluations qui suivront, il suffit de donner à H′ la valeur moyenne 2,66; l'erreur est au plus de 0,16, et, après avoir multiplié par $\frac{3}{7}$ pour déduire x de la formule (12), elle se réduit à 0,07. Il en résulte la valeur très simple

$$(13) \qquad x = 1,57q' - 0,71q.$$

Ce résultat remarquable ne dépend plus de g, a, a', mais seulement des durées $\frac{\pi}{\mu}$, $\frac{\pi}{\mu'}$ des oscillations pendulaires dont le système est susceptible.

Le cas des deux tiges se rattache à une question plus générale, savoir : de quelle façon la secousse du sol, transmise à un édifice, s'augmente-t-elle dans les portions supérieures? La question est trop complexe pour être directement résolue; mais les portions supérieures de l'édifice, les objets qu'elles contiennent, éprouvent, dans leurs appuis, une secousse résultant elle-même de celle du sol; or, de la même façon, dans le cas des tiges, le mouvement du point A joue, pour la tige AB, le rôle de l'ébranlement du sol. L'assimilation d'un bâtiment ou d'un mur au système des deux tiges n'est point parfaite et, en particulier, la pesanteur, qui tend à écarter les tiges de la verticale tend au contraire à y ramener un bâtiment, sauf dans le cas de secousses violentes et destructives; mais cette différence n'est qu'apparente : l'influence de la pesanteur a disparu dans la formule (13) et, d'autre part, le moment de la pesanteur et de toutes les forces qui tendent à ramener un mur à la position verticale, quand l'angle d'écart est petit, ne peut être que proportionnel à cet angle, comme nous l'avons admis pour les tiges sans rien spécifier relativement à la nature de ces forces. Ainsi, la comparaison de la déviation maxima de l'extrémité B, dans le cas de deux tiges et d'une seule, nous donnera au moins une idée

de l'effet de la mobilité relative des parties inférieure et supérieure d'un édifice.

Le mode de variation de q, q', q'' suivant la nature de la secousse a déjà été indiqué au n° **1**, l'intégrale (2) étant la même que q.

Ici la durée de la secousse est très petite par rapport aux durées $\frac{\pi}{\mu}$, $\frac{\pi}{\mu'}$, $\frac{\pi}{\mu''}$ des oscillations pendulaires, $\cos\mu(t-t')$ est sensiblement l'unité pendant cette durée, de sorte que l'on a

$$q = u$$

et, de même,

$$q' = q'' = u.$$

La valeur $x'' = \frac{2}{3}q''$ et celle de x se réduisent à

$$x'' = \frac{3}{2}u, \qquad x = 0,86\,u;$$

le maximum de u est h au bout de la première période de la secousse : pendant la seconde u diminue, et dans le mouvement qui subsiste ensuite, q, q', q'' sont très inférieurs à h. On voit donc que les déplacements maxima sont $\frac{3}{2}h$; $0,86h$, ou plus faibles dans le cas des deux tiges.

En supposant la durée de la secousse plus grande, x sera le plus grand en donnant à q et q' leurs valeurs maxima de signes contraires; désignant par M une moyenne entre ces valeurs, on aura

$$x = 2,28\,\mathrm{M},$$

tandis que le maximum de x'' est $\frac{3}{2}\mathrm{M}''$, M'' étant celui de q''. On peut remarquer que, à très peu près, $2,28 = (\frac{3}{2})^2$. Par conséquent, si M'' et M sont peu différents, les maxima de déviation, dans le cas de deux tiges et d'une seule, sont dans le rapport de 3 à 2. Mais ce résultat suppose que q et q' atteignent simultanément leurs valeurs maxima de signe contraire, ce qui est une coïncidence improbable. On en peut conclure qu'en général la déviation ne sera pas beaucoup plus grande pour deux tiges que pour une seule.

En supposant que a soit le même pour x et x'', voici ce qu'on peut connaître des grandeurs relatives de μ, μ', μ''.

On a

$$z > \frac{z+z'}{2} > a, \qquad \frac{zz'}{2z} < \frac{zz'}{z+z'}, \qquad \text{ou} \qquad z' < \frac{aa'-g^2}{a+8a'+5g} < \frac{aa'}{8a'}.$$

Ainsi

$$z > a, \qquad z' < \frac{a}{8}, \qquad z'' = \frac{a}{16}.$$

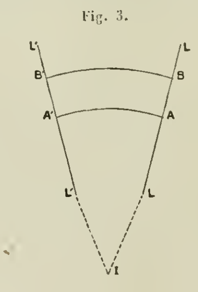
Par conséquent, μ' et μ'' peuvent être du même ordre de grandeur, mais μ est beaucoup plus grand que chacun d'eux, puisque $\mu > 4\mu'$, $\mu > 4\mu''$.

§ 2. — Application à une tige élastique.

5. Équations du mouvement, abstraction faite de la secousse. — Quoique cette équation soit connue, il n'est pas inutile d'en présenter ici la démonstration, qui, telle qu'on la fait d'ordinaire, renferme une lacune.

Cherchons d'abord la position d'équilibre. On suppose que la tige est homogène prismatique; en l'absence de toute force, le plan de la figure la partage en deux portions symétriques; il en sera encore de même après sa déformation, en supposant que toutes les forces agissent dans ce plan ou sont symétriques par rapport à lui. Ainsi deux sections droites, d'aire ω, primitivement situées à une petite dis-

Fig. 3.



tance λ resteront perpendiculaires au plan de la figure qui les coupe suivant LL, L'L'; A et A' sont les centres de gravité des deux aires,

AA′ un petit arc du filet moyen, lieu des centres de gravité; BB′ est la projection d'un autre filet qui, dans l'état naturel de la tige, était parallèle à AA′, et joint deux éléments égaux $d\omega$ des aires, projetés en B, B′ : soient $AB = A'B' = u$, $AI = A'I = \rho$, rayon de courbure du filet moyen.

La longueur primitive de AA′, BB′ était λ; soient δ, δ' leurs allongements relatifs. On a

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{BI}{AI}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\lambda(1+\delta')}{\lambda(1+\delta)} = \frac{u+\rho}{\rho}, \qquad \text{ou} \qquad \delta' = \delta + \frac{u}{\rho},$$

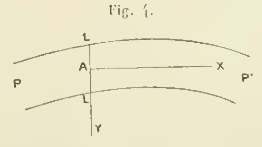
en négligeant le produit des petits nombres δ, $\frac{u}{\rho}$.

L'allongement δ' produit sur l'élément $d\omega$ une force ou traction normale $k\delta' d\omega$, k étant le coefficient d'extension rapporté aux unités d'extension et de surface. Elle se change en pression si δ' est négatif ou correspond à une contraction.

Il doit se produire aussi, en général, un léger glissement altérant d'un petit angle ε, l'angle droit que les arcs AA′, BB′ ont été supposés faire avec LL, et accompagné d'une force $k'\varepsilon\, d\omega$, parallèle à LL et agissant sur $d\omega$, k' étant le coefficient de résistance au glissement pour l'unité de surface. Cet angle ε altérerait la figure et la valeur de δ'. Mais la résistance k' est énorme et cette altération peut être négligée. La flexion et même l'allongement ont des valeurs sensibles, et non l'angle ε, bien que, pour les équations d'équilibre, on doive le supposer exister.

De là résulte l'ensemble des forces agissant sur une section LL, et exercées par la partie P de la tige située à gauche, sur l'autre P′ que

Fig. 4.



nous supposons libre. Pour les autres forces extérieures agissant sur P′, soient S, S′ les sommes de leurs projections sur les axes AX, AY dont le premier est perpendiculaire à LL, et M la somme de leurs moments

par rapport au point A. Les sommes analogues provenant de l'action de P seront, suivant AX,

$$-k\sum \delta'\,d\omega \qquad \text{ou} \qquad -k\sum\left(\delta+\frac{u}{\rho}\right)d\omega,$$

qui se réduit à

$$-k\sum \delta\,d\omega \qquad \text{ou} \qquad -k\delta\omega,$$

en remarquant que $\sum u\,d\omega = 0$. Pour la même raison, la somme des moments par rapport à A, ou $-k\sum u\,\delta'\,d\omega$ se réduit à

$$-\frac{k}{\rho}\sum u^2\,d\omega \qquad \text{ou} \qquad -\frac{k}{\rho}c^2\omega,$$

c étant de l'ordre des dimensions transversales de la tige. Parallèlement à LL la somme des projections des forces est $-k'\varepsilon\omega$, d'où résultent, pour les conditions d'équilibre de P′,

$$k\omega\delta = S, \qquad k'\omega\varepsilon = S', \qquad \frac{kc^2}{\rho}\omega = M.$$

Les deux premières donnent δ, ε, et la troisième $\frac{1}{\rho}$ ou la courbe du filet moyen.

Le moment, par rapport à A, des forces dont S est la somme, est évidemment très faible à moins d'une flexion considérable; en désignant par β le bras de levier moyen des forces parallèles à AY, on aura donc, à très peu près,

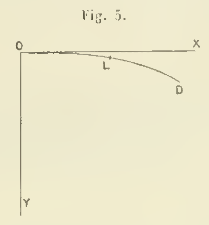
$$M = S'\beta, \qquad \delta = \frac{S}{k\omega}, \qquad \frac{c}{\rho} = \frac{S'}{k\omega}\frac{\beta}{c}.$$

Si S et S′ sont du même ordre de grandeur, comme $\frac{\beta}{c}$ est, en général, très grand, δ sera très petit par rapport à $\frac{c}{\rho}$, et, par suite, aux valeurs moyennes de $\frac{u}{\rho}$, c'est-à-dire que δ' est beaucoup plus grand que δ. Dans tous les cas où il y a flexion, δ sera donc faible, sans quoi δ'

dépasserait la limite de rupture. Du reste, δ étant toujours un allongement très petit, on peut n'en pas tenir compte en cherchant la forme de la courbe dont ρ est le rayon de courbure. Ce sera surtout fort exact si, comme dans ce qui va suivre, toutes les forces sont à peu près perpendiculaires à la tige, ce qui rend S insensible.

Supposons maintenant la tige encastrée en O qui sera l'origine, sur

Fig. 5.



le filet moyen, OX étant tangente à ce filet; soient x, y les coordonnées d'un quelconque L de ses points. On devra avoir

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{pour } x = 0,$$

et la courbe achèvera d'être déterminée par une équation différentielle du second ordre qui sera l'équation $\frac{kc^2\omega}{\rho} = \text{M}$ appliquée à tous ses points.

Admettons qu'il agisse sur tous une force accélératrice Y fonction de x. Si m est la masse de l'unité de longueur, la force, pour la tranche correspondant à l'arc ds de la courbe, sera $m\text{Y}\,ds$, et, pour le point L, on aura

$$\frac{kc^2\omega}{\rho} = \int_x^l m(x' - x)\,\text{Y}'\,\frac{ds}{dx'}\,dx',$$

l étant la valeur de x à l'extrémité D, et Y′ ce que devient Y quand on y remplace x par x'. En négligeant les erreurs relatives de l'ordre de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, on pourra remplacer ds par dx', et $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui a bien le signe +, en supposant, comme on l'a fait, le centre de courbure au-

dessous de la tige et M positif. Il en résulte

$$b^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_x^l (x' - x) Y' \, dx', \qquad \text{où} \qquad b^2 = \frac{kc^2 \omega}{m}.$$

Si on lui substitue sa dérivée, ou

$$b^2 \frac{d^3 y}{dx^3} = -\int_x^l Y' \, dx',$$

l'équation primitive n'en résulte qu'avec l'addition d'une constante arbitraire. Cette indétermination disparaît en y joignant la condition évidente $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ pour $x = l$. En répétant la même opération, on aura encore

$$\frac{d^2 y}{dx^3} = 0, \quad \text{pour} \quad x = l,$$

et l'équation

$$b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = Y.$$

Pour passer à l'équation du mouvement on devra remplacer chaque composante $Y\,dm$ de la force exercée sur l'élément de masse dm par $Y\,dm - dm \frac{d^2 y}{dt^2}$; ce qui donne pour équation du mouvement de la tige

$$(14) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = Y,$$

avec les équations aux limites

$$(15) \qquad \begin{cases} y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{pour } x = 0, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \quad \text{pour } x = l, \end{cases}$$

l étant la longueur de la tige.

Si, au lieu de x, on prend pour variable $\frac{x}{l} = x'$ et qu'on pose $\frac{b}{l^2} = b$,

le terme $b^2 \frac{d^4 y}{dx^4}$ deviendra

$$b'^2 \frac{d^4 y}{dx'^4}.$$

Ainsi, en supprimant l'accent, il est indifférent de prendre $l = 1$, et, si plus tard on veut adapter le résultat au cas l quelconque, il suffira de remplacer x et b par $\frac{x}{l}$, $\frac{b}{l^2}$.

6. Intégrales simples de l'équation sans second membre. — Nous n'aurons plus à employer les lettres des calculs du numéro précédent, sauf celles qui entrent dans les formules (14) et (15); les autres pourront servir avec une nouvelle signification. L'équation à intégrer est

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0, \tag{16}$$

où b est une constante. La méthode suivante se trouve dans la *Mécanique* de Poisson; mais, comme elle présente quelques lacunes, il est préférable de la reproduire.

On aura une solution particulière de l'équation précédente en prenant

$$y = p \cos b\mu^2 t = p' \sin b\mu^2 t,$$

μ étant une constante réelle ou imaginaire et p, p' des fonctions de x seul; p devra satisfaire à l'équation $\frac{d^4 p}{dx^4} = \mu^4 p$, dont l'intégrale complète est

$$p = \mathrm{A} \sin \mu x + \mathrm{A}' \cos \mu x + \mathrm{B}(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) + \mathrm{B}'(e^{\mu x} + e^{-\mu x}),$$

A, B, A′, B′ étant des constantes; mais, en outre, p doit satisfaire aux équations (15), c'est-à-dire,

$$p = 0, \qquad \frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = 0; \qquad \frac{d^2 p}{dx^2}, \ \frac{d^3 p}{dx^3} = 0 \quad \text{pour } x = 1.$$

Pour abréger, posons

$$(17)\quad \begin{cases} \cos\mu = c, & \sin\mu = s, \\ e^{\mu}+e^{-\mu}=f, & e^{\mu}-e^{-\mu}=g, \\ 2c+f=f', & 2s+g=g'. \end{cases}$$

On aura, pour ces conditions,

$$2B = -A, \qquad 2B' = -A',$$

$$-As - A'c + B'f + Bg = 0, \qquad -Ac + A's + Bf + B'g = 0,$$

d'où

$$Ag' + A'f' = 0, \qquad -Af' + A'(2s - g) = 0.$$

De la première on tire

$$A = f'E, \qquad A' = -g'E,$$

E étant une constante arbitraire, et l'autre devient

$$f'^2 + g'(2s - g) = 0,$$

équation à laquelle μ doit satisfaire; en la divisant par 4, nous l'exprimerons par $F(\mu) = 0$, et $\frac{dF(\mu)}{d\mu}$ sera désignée par $F'(\mu)$. On aura ainsi

$$4F(\mu) = (2c+f)^2 + (4s^2 - g^2), \qquad f^2 - g^2 = 4,$$

d'où

$$(18)\quad F(\mu) = fc + 2 = (e^{\mu} + e^{-\mu})\cos\mu + 2, \qquad F'(\mu) = cg - sf.$$

En posant

$$(19)\quad X = f'(\sin\mu x - \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x}) + g'(-\cos\mu x + \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x}),$$

il en résulte

$$p = EX.$$

On trouverait de même p', qui ne pourrait différer de p que par la valeur de la constante E; en la remplaçant par $\frac{E'}{b\mu^2}$, on aura pour solution particulière

$$(20) \qquad y = X\left(E\cos b\mu^2 t + \frac{E'}{b\mu^2}\sin b\mu^2 t\right),$$

et X satisfait aux conditions

$$(21) \qquad \begin{cases} X = 0, & \dfrac{dX}{dx} = 0, \quad \text{pour } x = 0; \\ \dfrac{d^2X}{dx^2} = 0, & \dfrac{d^3X}{dx^3} = 0, \quad \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

On peut remarquer, en désignant par X' ce que devient X, en y remplaçant μ par une autre racine μ', qu'on a

$$\mu^4 X = \frac{d^4X}{dx^4}, \qquad \mu'^4 X' = \frac{d^4X'}{dx^4}, \qquad (\mu'^4 - \mu^4)XX' = X\frac{d^4X'}{dx^4} - X'\frac{d^4X}{dx^4}$$

et, en multipliant par dx et intégrant, à une constante près,

$$(\mu'^4 - \mu^4)\int XX'\,dx = X\frac{d^3X'}{dx^3} - \frac{dX}{dx}\frac{d^2X'}{dx^2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{dX'}{dx} - \frac{d^3X}{dx^3}X';$$

en vertu des relations (21), le second membre s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$.

Il en résulte que, si μ^4 et μ'^4 sont différents, on a

$$(22) \qquad \int_0^1 XX'\,dx = 0.$$

Propriétés des racines de l'équation $F(\mu) = 0$. — Avant de détailler celles qu'indique Poisson, il faut démontrer deux points qu'il a omis.

1° L'équation ne peut avoir aucune racine de la forme $h(1+\sqrt{-1})$, h étant réelle. En effet, la valeur (18) peut s'écrire

$$F(\mu) = 2\cos\mu\cos\mu\sqrt{-1} + 2,$$

ou

$$F(\mu) = \cos\mu(1+\sqrt{-1}) + \cos\mu(1-\sqrt{-1}) + 2$$

et, en supposant $\mu = h(1+\sqrt{-1})$,

$$F(\mu) = \cos 2h\sqrt{-1} + \cos 2h + 2,$$

dont le premier terme, ou $\frac{1}{2}e^{2h} + \frac{1}{2}e^{-2h}$, est positif; ainsi $F(\mu)$ ne peut être nul,

2° Pour aucune racine μ, on ne peut avoir $X = 0$ quel que soit x; en effet, on aurait aussi

$$\frac{d^2X}{\mu^2\,dx^2} = 0$$

et, d'après la valeur (19), en soustrayant $X = 0$, il en résulterait

$$f'\sin\mu x - g'\cos\mu x = 0;$$

en posant $x = 0$ dans cette relation et sa dérivée, il en résulterait

$$f' = 0, \qquad g' = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2c + f = 0, \qquad 2s + g = 0;$$

substituant $f = -2c$ dans $F(\mu) = fc + z = 0$, on aurait

$$c^2 = 1,$$

d'où

$$s = 0, \qquad g = 0$$

ou

$$e^{\mu} - e^{-\mu} = 0, \qquad e^{\mu\sqrt{-1}} - e^{-\mu\sqrt{-1}} = 0, \qquad \text{ou} \qquad e^{2\mu} = 1, \qquad e^{2\mu\sqrt{-1}} = 1;$$

les modules de $e^{2\mu}$, $e^{2\mu\sqrt{-1}}$ seraient donc l'unité, et en posant

$$\mu = h + h'\sqrt{-1},$$

h et h' étant réelles, il faudrait qu'on eût $e^{2h} = 1$, $e^{-2h'} = 1$, d'où

$$h = 0, \qquad h' = 0,$$

et $\mu = 0$; or la valeur $\mu = 0$ n'est pas racine de $F(\mu) = 0$.

Nous pouvons maintenant démontrer que l'équation $F(\mu) = 0$ ne peut avoir aucune racine de la forme $\mu = h + h'\sqrt{-1}$, h et h' étant réelles et toutes deux différentes de 0; en effet, $\mu' = h - h'\sqrt{-1}$ serait une autre racine et $\mu^4 - \mu'^4$ ou $8hh'(h^2 - h'^2)\sqrt{-1}$ ne serait pas nulle, sans quoi on aurait $h'^2 = h^2$, $h' = \pm h$, et μ, μ' auraient pour valeur $h(1 \pm \sqrt{-1})$, ce qu'on a vu être impossible. En désignant par X, X' les valeurs correspondantes de X, elles satisferaient donc à la relation (22) et, leur forme étant $F \pm G\sqrt{-1}$, il en résulterait

$$\int_0^1 (F^2 + G^2)\,dx = 0.$$

Comme F et G sont réelles, il faudrait que l'on eût, pour toutes les valeurs de x, $F = 0$, $G = 0$ et, par suite, $X = 0$, et l'on vient de voir que c'est impossible.

Toutes les racines ont donc la forme $\pm h$, $\pm h\sqrt{-1}$, h étant réelle et positive. D'ailleurs, en prenant pour μ ces quatre valeurs, $F(\mu)$ ne change pas. Les racines se distribuent donc en groupes de quatre valeurs de cette forme, pour lesquelles μ^4 est le même, et il suffit, pour les connaître, de chercher celles qui sont réelles et positives.

Il n'y a pas de racines égales, ou satisfaisant à la fois à $F(\mu) = 0$, $F'(\mu) = 0$, car, d'après les équations (18), on aurait

$$fe = -2;$$

ainsi ni e, ni f ne peuvent être nuls. De plus,

$$ge = fs, \qquad g^2e^2 = f^2 - f^2e^2 = f^2 - 4 = g^2 \qquad \text{ou} \qquad g^2s^2 = 0;$$

s ou g seraient nulles : puisque $ge - fs = 0$ et que ni f, ni e ne sont nulles, il faut que l'on ait $s = 0$ et $g = 0$; soit que μ ait la forme $\pm h$ ou $\pm h\sqrt{-1}$, il en résulte

$$e^{2\mu} = 1, \qquad h' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu = 0,$$

ce qui est impossible. [On a alors $F'(\mu) = 4$.]

Supposons maintenant que l'on fasse croître μ de $n\frac{\pi}{2}$ à $(n+1)\frac{\pi}{2}$, n étant un entier positif ou nul. L'expression

$$\frac{4}{(e^{\mu}+e^{-\mu})^2} - \frac{1}{\cos^2\mu}$$

est toujours négative dans cet intervalle, en laissant de côté les valeurs extrêmes $n\frac{\pi}{2}$, $(n+1)\frac{\pi}{2}$; elle est la dérivée de $\frac{e^{\mu}-e^{-\mu}}{e^{\mu}+e^{-\mu}} - \operatorname{tang}\mu$, qui, par suite, est toujours décroissante et ne peut s'annuler qu'une fois dans l'intervalle; son produit par $(e^{\mu}+e^{-\mu})\cos\mu$, c'est-à-dire $F'(\mu)$, ne pourra donc, non plus, s'annuler plus d'une fois, et $F(\mu)$ aura dans l'intervalle au plus une période de croissance et une de décroissance, et ne pourra s'annuler plus de deux fois.

D'ailleurs, $F(\mu)$ ou $fc+2$ ne peut s'annuler que si $\cos\mu$ dans l'intervalle de $n\frac{\pi}{2}$ à $(n+1)\frac{\pi}{2}$ est négatif, ou si n a la forme $4i+1$ ou $4i+2$, i étant un entier. Mais, quand il en est ainsi, les valeurs extrêmes de $F(\mu)$ sont 2 et $2-f$, ou de signe contraire; n'ayant pu changer de signe plus d'une fois, il ne s'est annulé qu'une seule.

Par conséquent, les valeurs réelles et positives de μ, rangées par ordre de grandeur croissante, sont

$$\frac{\pi}{2}+\delta, \quad \frac{3\pi}{2}-\delta', \quad \frac{5\pi}{2}+\delta'', \quad \frac{7\pi}{2}-\delta''', \quad \ldots,$$

dans lesquelles δ, δ', δ'', ... sont comprises entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$; $\sin\delta$, $\sin\delta'$, $\sin\delta''$, ... sont les valeurs de $-\cos\mu$ ou de $\frac{2}{e^{\mu}+e^{-\mu}}$, très rapidement décroissantes. Pour la plus petite racine $\frac{\pi}{2}+\delta$, Poisson a donné

$$\mu = \frac{\pi}{2} + 0,30431 = 1,87511,$$

valeur aisée à vérifier. Quant aux autres, il suffit de connaître leurs valeurs approchées $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, ..., dont l'erreur est très faible et devient rapidement négligeable.

7. Intégrale de l'équation (16). — Supposons données, de $x=0$ à $x=1$, les valeurs initiales

$$(23)\qquad y=\varphi(x),\qquad \frac{dy}{dt}=f(x),\qquad \text{pour } t=0.$$

Poisson admet comme postulat que l'intégrale complète est une somme de solutions particulières de la forme (20), étendue à toutes les racines μ, de sorte que l'on a

$$y=\sum X\left(E\cos b\mu^2 t+\frac{E'}{b\mu^2}\sin b\mu^2 t\right).$$

Si X correspond à une valeur particulière de μ, il résulte de la relation (22) que, dans l'expression $\int_0^1 Xy\,dx$, tous les termes de la somme $\sum$ correspondant à des racines μ' autres que μ disparaissent, de sorte que l'on a

$$\int_0^1 yX\,dx=\left(E\cos b\mu^2 t+\frac{E'}{b\mu^2}\sin b\mu^2 t\right)\int_0^1 X^2\,dx.$$

En posant $t=0$ dans cette équation et sa dérivée par rapport à t, il en résulte

$$E=\frac{\int_0^1 X\varphi(x)\,dx}{\int_0^1 X^2\,dx},\qquad E'=\frac{\int_0^1 Xfx\,dx}{\int_0^1 X^2\,dx}$$

et l'intégrale complète devient

$$y=\sum\frac{X}{\int_0^1 X^2\,dx}\left[\int_0^1 X\varphi(x)\,dx\cos b\mu^2 t+\int_0^1 Xf(x)\,dx\frac{\sin b\mu^2 t}{b\mu^2}\right].$$

Voici comment Cauchy transforme $\int_0^1 X^2\,dx$ dont le calcul est sans cela fort prolixe. Considérons μ non plus comme une racine de $F(\mu)=0$, mais comme une lettre indéterminée. On a encore identi-

quement
$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \mu^4 X,$$
d'où
$$\frac{d^5 X}{dx^4\, d\mu} = 4\mu^3 X + \mu^4 \frac{dX}{d\mu}.$$

En multipliant par X et substituant $\mu^4 X = \dfrac{d^4 X}{dx^4}$, on aura

$$4\mu^3 X^2 = X\frac{d^5 X}{dx^4\, d\mu} - \frac{dX}{d\mu}\,\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{dR}{dx}, \qquad 4\mu^3 \int_0^1 X^2\, dx = R_1 - R_0,$$

en posant
$$R = X\frac{d^4 X}{dx^4\, d\mu} - \frac{dX}{dx}\,\frac{d^3 X}{dx^2\, d\mu} + \frac{d^2 X}{dx^2}\,\frac{d^2 X}{dx\, d\mu} - \frac{d^3 X}{dx^3}\,\frac{dX}{d\mu},$$

et désignant par R_1, R_0 les valeurs de R correspondant à $x = 1$, $x = 0$.
Quel que soit μ, on a, quand $x = 0$,

$$X = 0, \qquad \frac{dX}{dx} = 0,$$
d'où
$$\frac{dX}{d\mu} = 0, \qquad \frac{d^2 X}{dx\, d\mu} = 0;$$
il en résulte
$$R_0 = 0.$$

Ensuite, quand $x = 1$, la valeur (19) donne

$$\frac{d^2 X}{\mu^2\, dx^2} = f'(-s - \tfrac{1}{2}g) + g'(c + \tfrac{1}{2}f) = -f'(\tfrac{1}{2}g') + g'(\tfrac{1}{2}f'),$$
$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3 X}{dx^2\, d\mu} = 0,$$

ce qui annule le second et le troisième terme de R; on a aussi, pour $x = 1$,
$$X = f'(s - \tfrac{1}{2}g) + g'(-c + \tfrac{1}{2}f),$$
ou

$$2X = (2c + f)(2s - g) - (2c - f)(2s + g) = 4(sf - gc),$$
$$2\frac{d^3 X}{\mu^3\, dx^3} = f'(-2c - f) + g'(-2s + g) = -f'^2 - (4s^2 - g^2).$$

et ces valeurs peuvent s'écrire, d'après les formules (18),

$$X = -2F'(\mu), \qquad \frac{d^3X}{dx^3} = -2\mu^3 F(\mu).$$

Il en résulte

$$4\mu^3 \int_0^1 X^2\,dx = 2F'(\mu)\frac{d}{d\mu}[2\mu^3 F(\mu)] - 2\mu^3 F(\mu)\frac{d}{d\mu}[2F'(\mu)],$$

ou, en faisant $F(\mu) = 0$ après les différentiations,

$$\int_0^1 X^2\,dx = [F'(\mu)]^2 = (ge - fs)^2.$$

L'intégrale complète est ainsi

$$(24)\qquad y = \sum \frac{X}{[F'(\mu)^2]}\left[\int_0^1 X\varphi(x)\,dx \cos b\mu^2 t + \int_0^1 X f(x)\,dx\,\frac{\sin b\mu^2 t}{b\mu^2}\right],$$

la somme $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs réelles et positives de μ.

8. Conditions que l'intégrale doit remplir. — Le postulat de Poisson n'est évidemment qu'une hypothèse gratuite, et il a laissé de côté les trois vérifications suivantes sans lesquelles la formule (24) n'est qu'une réunion de solutions particulières. Il faut démontrer : 1° que la série (24) est convergente; 2° que, pour $t = 0$, elle satisfait aux conditions (23); 3° qu'elle satisfait, quelque soit t, aux équations (16) et (15).

1° *Convergence de la série* (24). D'après les formules (18), on a

$$-F'(\mu) = fs - ge = fs + \frac{2g}{f},$$

et, quand μ croît à l'infini, $\frac{g}{f}$ ou $\frac{e^\mu - e^{-\mu}}{e^\mu + e^{-\mu}}$ converge vers l'unité, de même que $\frac{f}{e^\mu}$ et $\sin\mu$, sauf le signe; il en résulte que $e^{-2\mu}F'(\mu)^2$ a pour limite 1.

Ensuite la valeur (19) de X donne

$$e^{-\mu}X = (2ce^{-\mu} + 1 + e^{-2\mu})(\sin\mu x - \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x}) \\ + (2se^{-\mu} + 1 - e^{-2\mu})(-\cos\mu x + \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x}),$$

et si l'on y néglige les termes qui, quel que soit x, décroissent sans limite quand μ augmente, on devra dans les coefficients supprimer $e^{-2\mu}$ et aussi $2ce^{-\mu}$, puisque $c = -\frac{2}{f}$; il restera

$$se^{-\mu+\mu x} + \sin\mu x - \cos\mu x + e^{-\mu x},$$

dont chaque terme est au plus l'unité, et même le second et le troisième réunis forment au plus $\sqrt{2}$; puisqu'on a, au signe près,

$$\lim e^{-\mu} F'(\mu) = 1,$$

il en résulte qu'à partir d'une valeur de μ suffisamment grande, on aura numériquement

$$\frac{X}{F'(\mu)} = \frac{e^{-\mu}X}{e^{-\mu}F'(\mu)} < 4.$$

Il est clair que les termes conservés dans $e^{-\mu}X$ seraient à peu près les mêmes dans $\frac{d^2X}{\mu^2\,dx^2}$ et qu'on en tirerait de même

$$\frac{1}{\mu^2}\,\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{F'(\mu)} < 4.$$

Cela suffit pour vérifier la convergence de la série (24), si on la réduit à sa seconde partie dépendant de x; en effet, en y remplaçant $f(x)$ par son maximum numérique M, $\sin b\mu^2 t$ par 1 et, quel que soit x, $\frac{X}{F'(\mu)}$ par 4, elle se réduit à

$$M\sum\frac{16}{b\mu^2},$$

où les valeurs de μ sont supérieures à celles d'une progression arithmétique.

Quant à la première partie, il faut remarquer que la tige doit être supposée encastrée déjà dans les conditions initiales, de sorte que l'on a ([1])

$$\varphi(x) = 0, \qquad \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0, \qquad \text{pour } x = 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\mu^4 \int X\varphi(x)\,dx &= \int \frac{d^4 X}{dx^4}\varphi(x)\,dx \\ &= \frac{d^3 X}{dx^3}\varphi(x) - \frac{d^2 X}{dx^2}\frac{d\varphi(x)}{dx} + \int \frac{d^2 X}{dx^2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\,dx.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes s'annulent pour $x = 0$, d'après les conditions précédentes, et aussi pour $x = 1$, d'après les relations (21). On a donc

$$\int_0^1 X\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\mu^2}\int_0^1 \frac{d^2 X}{\mu^2\,dx^2}\,\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\,dx,$$

et pourvu que $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ ne devienne pas infinie dans les limites de l'intégrale, en remplaçant

$$\frac{X}{F'(\mu)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F'(\mu)}\,\frac{d^2 X}{\mu^2\,dx^2}$$

par 4, on verra, comme ci-dessus, que la série a ses termes numériquement inférieurs à ceux d'une suite de la forme $M'\sum\frac{1}{\mu^2}$, où M' a une valeur finie.

2° *Conditions initiales.* — Leur vérification ne peut se faire que par les théorèmes généraux dus à Cauchy et dont l'application demande une discussion détaillée dans chaque cas particulier. Pour ne pas interrompre la recherche actuelle relative à la tige, je renvoie cette discussion au § 3, et, pour le moment, nous admettrons que la série (24) et sa dérivée $\frac{dy}{dt}$ se réduisent bien à $\varphi(x)$, $f(x)$ quand $t = 0$, sans que $\varphi(x)$ soit astreinte à aucune condition pour $x = 0$ ou 1.

3° *Conditions* (16) *et* (17). — Ces relations sont satisfaites séparé-

([1]) *Voir*, au n° 21, le complément de cette démonstration.

ment par chaque terme de la série (24); mais, pour pouvoir dire qu'il en est de même pour la série tout entière, il faudrait que ses dérivées fussent convergentes. Or en particulier $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ne diffèrent de y que par l'introduction d'un facteur μ^4 ou $b^2\mu^4$ dans chaque terme. On pourrait essayer de le faire disparaître comme ci-dessus en substituant dans la portion dépendant de $f(x)$,

$$\begin{aligned}\mu^4 \int X f(x)\,dx &= \int \frac{d^4X}{dx^4} f(x)\,dx \\ &= \frac{d^3X}{dx^3} f(x) - \frac{d^2X}{dx^2}\frac{df(x)}{dx} + \frac{dX}{dx}\frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ &\quad - X\frac{d^3f(x)}{dx^3} + \int X \frac{d^4f(x)}{dx^4}\,dx.\end{aligned}$$

Il faudrait alors, pour annuler les termes hors du signe $\int$ quand $x = 0$ ou 1, supposer que $f(x)$ satisfait aux conditions (21), ou que l'on ait

$$f(x) = 0, \qquad \frac{df(x)}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x = 0;$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3f(x)}{dx^3} = 0 \qquad \text{pour } x = 1,$$

et qu'en outre $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$ reste finie entre les limites $x = 0$ et 1. S'il en est ainsi, il est clair que, dans la portion de la série dépendant de $f(x)$, les termes seraient inférieurs à ceux d'une suite de la forme $M'' \sum \frac{1}{\mu^2}$.

Mais cette transformation ne suffirait pas pour la portion dépendant de $\varphi(x)$; aussi devons-nous recourir à un autre mode de raisonnement.

Soit y_n la somme des n premiers termes de la valeur (24) de y; y_n satisfait aux équations (16) et (15), et les valeurs initiales de y_n, $\frac{dy_n}{dt}$ sont des fonctions $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$ différentes de $\varphi(x)$, $f(x)$, et que l'on obtient en posant $t = 0$ dans les valeurs de y_n, $\frac{dy_n}{dt}$; ainsi, quand n croît à l'infini, $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$ finissent par différer aussi peu que l'on

voudra de $\varphi(x)$, $f(x)$. Or, si les fonctions initiales étaient $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$, le mouvement de la tige serait bien représenté par y_n ; si $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$ finissent par différer infiniment peu de $\varphi(x)$, $f(x)$, ce mouvement sera donc bien à la limite le mouvement correspondant à $\varphi(x)$, $f(x)$; celui-là est donc représenté par la valeur limite de y_n ou par la formule (24).

9. Intégrale complète de l'équation (14). — Cherchons maintenant l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = Y,$$

satisfaisant en outre aux équations (15) où $l = 1$, et aux conditions initiales (23).

Il suffira de déterminer y en regardant les fonctions initiales $\varphi(x)$, $f(x)$ comme nulles, car, en ajoutant au résultat l'expression (24), on aura évidemment la solution demandée. Nous admettons que l'expression Y est une fonction donnée quelconque de t et x. Toutefois, pour trouver la valeur de y, qui sera ensuite vérifiée, nous pouvons regarder Y comme une accélération imprimée à tous les points de la tige, puisque, dans sa signification primitive, c'était une force accélératrice. Nous pouvons, provisoirement, ne l'astreindre à aucune condition spéciale correspondant à l'encastrement.

Soit Y' ce que devient Y quand on y remplace t par t'. L'effet de la force équivaut à une série de vitesses $Y'dt'$, imprimées à tous les points de la tige à des intervalles de temps dt' ; le mouvement est dû à ces vitesses seules, les fonctions φ et f étant nulles. La valeur de y, due à une seule vitesse $Y'dt'$, se déduit de la formule (24) en remplaçant $\varphi(x)$ par o, la vitesse initiale $f(x)$ par $Y'dt'$, et t par $t - t'$, temps écoulé depuis l'époque initiale. La valeur complète de y est la somme de celles qui correspondent aux vitesses élémentaires, ou

$$(25) \qquad y = \sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2} \int_0^t \int_0^1 X Y' \frac{\sin b\mu^2(t - t')}{b\mu^2} \, dx \, dt'.$$

Vérification. — En remplaçant $\sin b\mu^2(t - t')$ par 1, Y par son

maximum numérique, et quel que soit x, $\frac{X}{F'(\mu)}$ par 4, on verra, comme au numéro précédent, que la série est convergente.

Soit y_n la somme des n premiers termes. On aura

$$\frac{dy_n}{dt} = \sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2} \int_0^t \int_0^1 XY' \cos b\mu^2(t-t')\, dx\, dt'.$$

Ainsi y_n et $\frac{dy_n}{dt}$ s'annulent avec t. En outre, en remarquant que $\frac{d^4 X}{dx^4} = \mu^4 X$, on aura

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y_n}{dx^4} = Y_n,$$

où

$$Y_n = \sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2} \int_0^1 XY\, dx,$$

la somme $\sum$ s'étendant aux n premiers termes. De plus, y_n comme X satisfait aux conditions (15). Par conséquent, si, dans l'équation (14), le second membre était Y_n au lieu de Y, y_n serait de la valeur exacte de y, satisfaisant à toutes les conditions, y compris celle de s'annuler pour $t = 0$ de même que sa dérivée.

Or, d'après ce qui a été dit au numéro précédent relativement aux conditions initiales, il est prouvé que toute série de la forme

$$\sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2} \int_0^1 X \varphi(x)\, dx$$

est convergente et a pour somme $\varphi(x)$. Il en résulte, en remplaçant $\varphi(x)$ par Y, qu'en faisant croître n à l'infini, Y_n a pour limite Y, et par suite la valeur exacte de y sera la limite de y_n ou l'expression (25).

10. Lois du mouvement relatif pour une secousse de nature quelconque. — Si l'on veut passer du cas simple examiné jusqu'ici à celui des secousses tournantes, il est nécessaire de rappeler quelques principes généraux.

1° *Changement de coordonnées.* — Étant donné un système S de points ou de corps, rapportons son mouvement à un premier système

A d'axes des x, y, z, immobile, puis à un second A' des x', y', z' en mouvement d'une manière quelconque. Prenons d'abord pour S un point libre M et soient f la force qui agit sur lui; X, Y, Z ses projections sur les axes A; X', Y', Z' les mêmes pour les axes A', en supposant f rapportée à l'unité de masse. Les équations du mouvement absolu sont $\frac{d^2x}{dt^2} = X, \ldots$, et, en transformant les coordonnées, on aura pour celles du mouvement relatif

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + X'', \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = Y' + Y'', \qquad \frac{d^2z'}{dt^2} = Z' + Z''.$$

Les termes additionnels X'', Y'', Z'' dépendent de $x', y', z', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$, ou de la position relative et de la vitesse relative du point et, en outre, du mouvement des axes. On peut les regarder comme les projections d'une force fictive ou apparente φ et, de la sorte, le mouvement relatif sera le même que si les axes ne bougeaient pas, mais qu'à la force f on joignît la force φ.

Il en est de même pour tout système S, car on peut toujours le considérer comme un assemblage de points libres exerçant entre eux des forces. Les lois du mouvement relatif s'obtiendront donc en supposant les axes A' immobiles, et corrigeant l'erreur par l'hypothèse que la force apparente φ agit sur chaque point, outre les forces réelles.

2° *Mouvement contraint.* — Admettons que le sol ou un ensemble de corps formant un tout de forme invariable éprouve un déplacement, et pour y rapporter celui du système S menons des axes fixes par rapport au sol. Ce seront les axes A dans la position primitive ou immobile du sol, les axes A' pendant son mouvement.

Admettons maintenant, en outre, que le système S renferme un certain nombre de points d'appui P, fixés au sol d'une manière invariable et dont le mouvement, par conséquent, sera *contraint* par celui du sol. Nous ne pourrons plus, en apparence, les considérer comme libres.

Nous pouvons les supposer tels, pendant le mouvement de S, si le sol est immobile en supposant les liaisons qui les fixent remplacées par des forces convenables F, F', ..., maintenant leur immobilité; mais

les lois du mouvement s'obtiennent aussi bien en laissant de côté ces forces, et exprimant d'une autre façon la condition d'immobilité; c'est ce qui a été fait pour la tige encastrée, en ajoutant aux autres conditions celles que y et $\frac{dy}{dx}$ fussent nuls pour $x = 0$.

Pendant le déplacement du sol, on pourrait de même regarder les points d'appui comme libres, en supposant l'action des forces F, F′, ... propres à leur donner leur mouvement contraint; ensuite, dans les équations du mouvement relatif, comme on l'a vu, on doit, pour déterminer ce mouvement, supposer l'action de la force apparente φ, puis considérer les axes comme immobiles, et, de la sorte, les forces F, F′, ... doivent être prises de façon à assurer l'immobilité des points d'appui. On retombe ainsi sur le cas précédent, et l'on peut de nouveau laisser de côté les forces F, F′, ..., en exprimant d'une autre manière la condition d'immobilité.

Pour la tige entre autres, il suffira donc de supposer sur tous ses points l'action de la force apparente φ et d'y joindre la condition qu'elle est encastrée en l'exprimant comme si les axes étaient fixes.

On aura ainsi son mouvement tel qu'il apparaîtrait à un observateur partageant celui du sol.

3° *Cas où l'axe instantané a une direction constante.* — Le mouvement du système des axes A′ se compose de celui de l'origine O′ dont α, β, γ seront les coordonnées par rapport aux axes fixes et, en outre, d'un mouvement de rotation autour d'un axe instantané passant par O′. Nous laisserons de côté le cas plus compliqué où cet axe a une direction variable, et nous supposerons qu'il reste parallèle à lui-même.

Pour la transformation, nous prendrons d'abord les nouveaux axes parallèles aux autres, et de même sens, de sorte que l'on aura

$$x = x' + \alpha,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$X' = X = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{d^2 \alpha}{dt^2},$$
$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = X' - \frac{d^2 \alpha}{dt^2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les termes additionnels X'', Y'', Z'' seront ainsi : $-\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $-\frac{d^2\beta}{dt^2}$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, et la force apparente φ est l'accélération de l'origine prise en signe contraire.

Puisqu'on doit la considérer comme agissant, il est plus simple de la faire rentrer dans les forces réelles f dont les projections sont X, Y, Z, et de désigner de nouveau par x, y, z les coordonnées relatives aux nouveaux axes qu'on doit maintenant supposer immobiles. Supposons, pour simplifier, que l'axe de rotation soit celui des z; en désignant par θ l'angle dont les axes mobiles ont tourné, on aura

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

La valeur de x se déduit de celle de y en remplaçant θ par $\theta + \frac{1}{2}\pi$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ se déduira de même de $\frac{d^2y}{dt^2}$. On trouvera ainsi

$$X = \frac{d^2x}{dt^2} = P\cos\theta - Q\sin\theta, \qquad Y = \frac{d^2y}{dt^2} = P\sin\theta + Q\cos\theta,$$

en posant

$$P = \frac{d^2x'}{dt^2} - 2\,\frac{dy'}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} - x'\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - y'\,\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$Q = \frac{d^2y'}{dt^2} + 2\,\frac{dx'}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} - y'\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + x'\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Ensuite

$$X' = X\cos\theta + Y\sin\theta = P, \qquad Y' = -X\sin\theta + Y\cos\theta = Q.$$

En substituant les valeurs de P, Q, ces relations prennent la forme supposée $\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + X''$, ..., dans lesquelles

$$(26)\qquad \begin{cases} X'' = 2\,\dfrac{dy'}{dt}\,\dfrac{d\theta}{dt} + x'\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + y'\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2}, \\ Y'' = -\,2\,\dfrac{dx'}{dt}\,\dfrac{d\theta}{dt} + y'\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 - x'\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2}, \\ Z'' = 0, \end{cases}$$

Ce sont les projections d'une seconde force apparente φ, agissant sur

tous les points du système, outre la première désignée ci-dessus par φ, et les forces réelles.

11. Application de ce qui précède a la tige. — Comme on l'a vu, le but de cette recherche est de trouver comment le déplacement du sol peut être augmenté en se communiquant à un corps élevé; nous devons donc supposer la tige verticale, encastrée inférieurement.

En outre, l'effet des forces φ, φ' est de donner des impulsions élémentaires successives aux divers points de la tige, et les mouvements dus à ces impulsions s'ajoutent algébriquement, de sorte qu'il suffit de les considérer séparément.

Il y a évidemment dans le mouvement du sol des complications à laisser de côté. Il est inutile de supposer variable l'axe de rotation; on n'a guère non plus à considérer des rotations azimutales, mais d'inclinaison. Aussi l'axe que nous avons pris pour celui des z sera horizontal; l'axe des x vertical suivant la tige.

Il est inutile également de tenir compte de la courbure du mouvement de translation ou du déplacement de l'origine mobile O; il sera rectiligne. La composante verticale de la force φ peut être laissée de côté, son effet étant détruit par la fixité du pied de la tige; il suffit de considérer le déplacement horizontal de O que nous désignerons par u, placé sur le prolongement de l'axe des y : la force φ se réduira ainsi à sa composante $\mathrm{Y} = \frac{d^2 u}{dt^2}\cdot$ C'est le cas simple que nous avons considéré précédemment pour un système de deux tiges articulées.

Quant à la force φ dont les projections X'', Y'', Z'' ont la valeur (26), il faut remarquer que θ est un très petit angle et qu'on doit négliger les termes de degré supérieur au premier par rapport à θ et ses dérivées, et entre autres $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ par rapport à $\frac{d^2\theta}{dt^2}$; cela devient du reste encore plus évident en attribuant à θ la forme d'un cosinus. Soit, en effet, $\theta = h(1 - \cos kt)$, h et k étant des constantes : θ croît alors de 0 à $2h$ et diminue jusqu'à 0 dans un temps $\frac{2\pi}{k}$; il en résulte

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = k^2 h^2 \sin^2 kt, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = k^2 h \cos kt,$$

et le rapport h des coefficients est imperceptible.

On doit regarder y' comme de l'ordre de θ, puisque la tige à l'état primitif était rectiligne et, par conséquent, négliger dans les formules (26) les termes ayant y' ou $\frac{dy'}{dt}$ en facteur. De la sorte, $X''=0$; aucune force ne tendant à donner à la tige des oscillations longitudinales, $\frac{dx'}{dt}=0$, et l'on a $Z''=0$, $Y''=-x'\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Nous désignerons les coordonnées par x, y, au lieu de x', y' et, en outre, nous remplacerons θ par $-\theta$, de sorte que cet angle tendra à éloigner la tige de l'axe des y. La force φ' se réduira ainsi à sa composante $Y=x\frac{d^2\theta}{dt^2}$, agissant sur chaque point; θ est le déplacement absolu qu'aurait l'extrémité si la tige restait rectiligne.

Soient u', θ' ce que deviennent u et θ quand on y remplace t par t'. En substituant soit $Y'=\frac{d^2u'}{dt'^2}$, soit $Y'=x\frac{d^2\theta'}{dt'^2}$ dans la formule (25), nous aurons

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \sum U\int_0^t \frac{d^2u'}{dt'^2}\,\frac{\sin b\mu^2(t-t')}{b\mu^2}\,dt',\\ y' &= \sum U'\int_0^t \frac{d^2\theta'}{dt'^2}\,\frac{\sin b\mu^2(t-t')}{b\mu^2}\,dt', \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(28)\qquad U=\frac{X\int_0^t X\,dx}{[F'(\mu)]^2},\qquad U'=\frac{X\int_0^t xX\,dx}{[F'(\mu)]^2},$$

y correspondant à la secousse par translation et y' à la secousse par inclinaison, la tige dans les deux cas étant rectiligne et immobile avant la secousse.

On a

$$\mu\int X\,dx=\int\frac{d^4X}{\mu^3\,dx^4}\,dx=\frac{d^3X}{\mu^3\,dx^3}.$$

Cette valeur est nulle pour $x=1$ et, d'après la formule (19), se réduit pour $x=0$ à $-2f'$. Ensuite

$$\mu^2\int xX\,dx=\int x\,\frac{d^4X}{\mu^2\,dx^4}\,dx=x\,\frac{d^3X}{\mu^2\,dx^3}-\frac{d^2X}{\mu^2\,dx^2}.$$

Le premier terme est nul pour $x = 1$ et $x = 0$, le second pour $x = 1$; il se réduit à $-2g'$ quand $x = 0$. Il en résulte

$$\int_0^1 X\,dx = \frac{2f'}{\mu}, \qquad \int_0^1 xX\,dx = \frac{2g'}{\mu^2}.$$

En outre, il nous suffit de connaître y et y' pour l'extrémité de la tige, et pour cela il faut prendre $x = 1$ dans le prēmier facteur X des formules (28). Comme on l'a vu au n° **7**, on a dans ce cas $X = -2F'(\mu)$, d'où résultent

$$U = -\frac{4f'}{\mu F'(\mu)}, \qquad U' = -\frac{4g'}{\mu^2 F'(\mu)}.$$

Pour simplifier ces valeurs, remarquons, comme on l'a vu au n° **6**, que les racines μ de rang impair, que nous appellerons, pour abréger, les racines impaires ont la forme $(4i+1)\frac{\pi}{2} + \delta$, et les racines paires la forme $(4i+3)\frac{\pi}{2} - \delta$, δ étant compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$; ainsi $\sin\mu = \pm\cos\delta$ étant positif pour les impaires, négatif pour les paires. Convenons d'employer les signes supérieurs pour les racines impaires, les signes inférieurs pour les paires. On a

$$fc + 2 = 0, \qquad s^2 = 1 - c^2 = \frac{f^2 - 4}{f^2} = \frac{g^2}{f^2}, \qquad s = \pm\frac{g}{f},$$

pour la valeur et pour le signe. Il en résulte, en exprimant tout en fonction de s et c,

$$f = -\frac{2}{c}, \qquad g = \pm fs = \mp\frac{2s}{c}, \qquad f' = 2c + f = -\frac{2s^2}{c},$$

$$g' = 2s + g = \frac{2s(c \mp 1)}{c} = \mp\frac{2s(1 \mp c)}{c},$$

$$F'(\mu) = gc - fs = \mp 2s + \frac{2s}{c} = \frac{2s(1 \mp c)}{c},$$

et les valeurs ci-dessus se réduisent à

$$U = \frac{4s}{\mu(1 \mp c)}, \qquad U' = \frac{\pm 4}{\mu^2}.$$

Pour la première racine, on a $U = 1,5660$, $U' = 1,1377$. Pour les autres, on peut prendre $c = 0$, $s = \pm 1$, d'où

$$(29)\qquad U = \frac{\pm 4}{\mu}, \qquad U' = \frac{\pm 4}{\mu^2}, \qquad \mu = \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

En même temps, en intégrant, par partie, $\frac{d^2u'}{dt'^2}$, $\frac{d^2\theta'}{dt'^2}$, et remarquant que $\frac{du'}{dt'}$, $\frac{d\theta'}{dt'}$ s'annulent avec t', les formules (27) deviendront

$$(30)\qquad \begin{cases} y = \sum U \int_0^t \frac{du'}{dt'} \cos b\mu^2(t-t')\,dt', \\ y' = \sum U' \int_0^t \frac{d\theta'}{dt'} \cos b\mu^2(t-t')\,dt'. \end{cases}$$

12. Remarques sur les valeurs précédentes. — Désignons par h l'excursion, c'est-à-dire le maximum de u ou de θ, ou le déplacement absolu qu'éprouverait l'extrémité de la tige si elle restait rectiligne pendant la secousse ; soit τ la durée de celle-ci et posons

$$b\mu^2 = m, \qquad \int_0^t \frac{du'}{dt'} \cos m(t-t')\,dt' = V,$$

en remplaçant u' par θ' pour y' comme dans tout ce qui suit, de sorte que m corresponde à la période $\frac{\pi}{m}$ d'un des mouvements naturels de la tige.

Nous avons vu, au n° **1**, le mode de variation de V dans divers cas ; il convient d'en distinguer trois, ou trois espèces de valeurs de m ou de V : 1° $\frac{\pi}{m}$ est très petit par rapport à τ ; 2° $\frac{\pi}{m}$ est très grand par rapport à τ ; 3° ils sont du même ordre de grandeur.

1° Si V est de la première espèce (en supposant, cela va sans dire, que la secousse soit réellement répartie sur la durée τ et non accumulée sur un instant plus court), la variation très rapide de $\cos m(t-t')$ rend V très petite par rapport à $\int \frac{du'}{dt'}\,dt'$, et, par conséquent, par

rapport à h : si y se réduisait au terme UV, il serait presque nul; la tige accompagnerait la secousse lente en restant presque rectiligne. Il en serait évidemment de même pour la valeur complète de y si, déjà pour le premier terme, τ était très grand par rapport à $\frac{\pi}{m}$.

2° Si V est de la seconde espèce, on a vu au n° **1** que V croît d'abord à peu près jusqu'à $+h$, puis diminue et reste insensible après la fin de la secousse. Si V est de la troisième espèce, le résultat est intermédiaire entre les deux autres cas : pendant la première partie de la secousse, V n'atteint pas la valeur h, et il en est de même pendant la seconde partie, à moins de coïncidences improbables; mais le mouvement, après la fin de la secousse, n'est pas insensible.

3° S'il existe dans la valeur de y des termes V de la seconde espèce, ils se trouvent parmi les premiers; pour le premier seul le maximum est ainsi $1,5660\,h$; si un grand nombre de termes consécutifs sont de cette même espèce, les suivants sont négligeables par suite de la petitesse du coefficient U, et, quant aux autres, V restant positive pendant la secousse, ils sont de signe alternatif; le maximum de y est ainsi moindre que la valeur ci-dessus et se réduit environ à h; il en est de même pour la valeur de y' si τ est le même. En poussant ce cas à l'extrême, c'est celui d'une secousse infiniment courte, où l'extrémité de la tige reste sensiblement immobile dans l'espace, ayant, par suite, $+h$ pour déplacement relatif maximum.

4° Il reste à examiner seulement le cas où les valeurs de V de troisième espèce se présentent dès le premier terme ou peu après.

Quoique, sur une donnée aussi peu précise, on ne puisse baser de résultat absolu pour ce qui se passe pendant la secousse, il est clair qu'à moins de coïncidences improbables, on ne doit pas s'attendre, pour y, à un maximum beaucoup plus grand que dans le cas précédent, ou que h; c'est surtout évident pour la valeur de y' puisque le coefficient U' décroît plus rapidement que U.

Mais, après la fin de la secousse, le mouvement persiste, et l'on se rendra mieux compte de ce qui se passe alors en attribuant à u ou θ la forme déjà employée

$$\theta \text{ ou } u = \tfrac{1}{2}h(1-\cos kt),$$

h étant le maximum de u et k la constante $\frac{2\pi}{\tau}$. On aura alors

$$V = \frac{hk}{2}\int_0^\tau \sin kt' \cos m(t-t')\,dt'$$
$$= \frac{hk}{4}\left(\frac{1}{k-m}+\frac{1}{k+m}\right)[\cos mt - \cos m(t-\tau)]$$

ou

$$V = -\lambda \sin m(t-\tfrac{1}{2}\tau),$$

en posant

$$\lambda = \frac{hk^2}{k^2-m^2}\sin\frac{m\tau}{2};$$

λ est l'amplitude de l'oscillation correspondant à un seul terme de y; pour trouver pour quel terme, ou quelle valeur de m, elle est la plus grande, posons

$$\frac{m\tau}{2} = x, \qquad k = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{\pi m}{x}, \qquad \lambda = h\pi^2 v,$$

où

$$v = \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}.$$

On verra plus loin que m ou x variant, le maximum de v correspond avec une grande exactitude à $x = \frac{5\pi}{6}$; on a

$$\tau = \frac{2\pi}{k}, \qquad x = \frac{m\tau}{2} = \frac{m\pi}{k};$$

cela suppose donc $m = \frac{5}{6}k$; il en résulte

$$v = \frac{18}{11\pi^2}, \qquad \lambda = \frac{18h}{11}.$$

Dans le cas très particulier où il en serait ainsi pour le premier terme de y ou y', l'amplitude $1,5660\lambda$ ou $1,1377\lambda$ de l'oscillation deviendrait, pour ce terme seul, $2,56h$ ou $1,86h$, tandis que, pour les termes sui-

vants, elle décroîtrait très rapidement. Il faut remarquer, en effet, que les valeurs de x sont proportionnelles à m ou à μ^2 et celles du dénominateur $x^2 - \pi^2$ le seraient sensiblement à μ^4.

Dans le cas général, le maximum de λ ne se réalisera qu'approximativement seulement, si dans le premier terme $m > \frac{5k}{6}$, et ce sera pour un autre terme, de sorte qu'après la secousse, y sera beaucoup plus faible de même que y'. Toutefois, il peut arriver que, dans les mouvements pendulaires correspondant à une série de termes, bien que tous soient faibles, il se présente, même au bout d'un temps assez long, une coïncidence de leurs maxima produisant à l'extrémité de la tige un ébranlement soudain fort sensible. Ce phénomène est aisé à vérifier par expérience.

Si l'on voulait assimiler un édifice ou un mur élevé à une tige élastique, il faudrait tenir compte de son élasticité imparfaite, qui a pour effet d'amortir rapidement tout mouvement pendulaire après la fin de la secousse.

5° *Maximum numérique de* $v = \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$. — La valeur de x correspondant à ce maximum ne peut dépasser π; en effet, soit $x = \pi + y$, y étant positif et différent de o; y ne peut être un multiple de π, ce qui donnerait $v = 0$; on aurait

$$v = + \frac{\sin y}{2\pi y + y^2};$$

or, en donnant à x la valeur numérique de $\pi - y$, on aurait, pour v, celle de

$$\frac{\sin y}{2\pi y - y^2}$$

qui est plus forte. Nous devons donc faire varier x seulement de o à π. On a

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v'}{(\pi^2 - x^2)^2},$$

$$v' = (\pi^2 - x^2)\cos x + 2x \sin x,$$

$$\frac{dv'}{dx} = -(\pi^2 - x^2 - 2)\sin x.$$

Par conséquent $\frac{dv'}{dx}$ est négatif de $x = 0$ à $x\sqrt{\pi^2 - 2}$, puis positif jusqu'à $x = \pi$; v' est d'abord décroissant, puis croissant. Comme $v' = \pi^2$ pour $x = 0$, $v' = 0$ pour $x = \pi$; v' s'annule une seule fois entre ces limites, ce qui correspond au maximum de v, v' passant du $+$ au $-$. Il en est ainsi presque rigoureusement quand $x = \frac{5\pi}{6}$, ce qui donne

$$v' = -\frac{11\pi^2}{36}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6} = 0{,}0063.$$

On trouve ainsi la valeur $\frac{5\pi}{6}$ employée ci-dessus.

§ 3. — Vérification des conditions initiales.

13. Transformation de la relation a démontrer. — Comme on l'a vu au nº **8**, nous avons à prouver que, pour $t = 0$, la valeur (24) de y se réduit à $\varphi(x)$; la condition analogue relative à $\frac{dy}{dt}$ est toute pareille en remplaçant $\varphi(x)$ par $f(x)$. En désignant par X' ce que devient X quand on substitue x' à x, la relation à vérifier est

$$(31) \qquad \varphi(x) = \sum \int_0^1 L\varphi(x')\,dx', \qquad \text{où} \qquad L = \frac{XX'}{[F'(\mu)]^2}.$$

La somme $\sum$ s'étend seulement aux racines μ de la forme $\mu = h$, où h est réelle et positive; mais, pour ce qui suivra, il convient de la remplacer par une autre s'étendant à toutes les racines telles que $\pm h$, $\pm h\sqrt{-1}$.

Posons, pour abréger,

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} & gc - fs = F'(\mu) = H, \\ & X = f'M + g'N, \\ & M = \sin\mu x + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x} - \tfrac{1}{2}e^{\mu x}, \\ & N = -\cos\mu x + \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x}. \end{aligned} \right.$$

En substituant

$$\cos\mu x = \tfrac{1}{2} e^{-\mu x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2} e^{-\mu x\sqrt{-1}},$$

$$\sin\mu x = \frac{\sqrt{-1}}{2} e^{-\mu x\sqrt{-1}} - \frac{\sqrt{-1}}{2} e^{\mu x\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\frac{X}{H} = pe^{-\mu x} + p' e^{-\mu x\sqrt{-1}} + p'' e^{\mu x} + p''' e^{\mu x\sqrt{-1}},$$

où

$$p = \frac{f' + g'}{2H},$$

$$p' = \frac{f'\sqrt{-1} - g'}{2H},$$

$$p'' = \frac{g' - f'}{2H},$$

$$p''' = \frac{-f'\sqrt{-1} - g'}{2H}.$$

Quand on change μ en $\mu\sqrt{-1}$, f' ou $2c + f$ reste le même, g' se change en $g'\sqrt{-1}$, H en $-H\sqrt{-1}$, et les nombres p, p', p'', p''' se changent chacun dans le suivant, le dernier devenant le premier. Il en est donc de même des quatre termes $pe^{-\mu x}$, ... de $\frac{X}{H}$. Ils résultent du premier en faisant plusieurs fois cette substitution, ou en remplaçant μ par $\mu\sqrt{-1}$, $-\mu$, $-\mu\sqrt{-1}$, $+\mu$.

Comme il en est de même pour $\frac{X'}{H}$, on voit qu'au lieu de substituer dans cette expression la valeur réelle et positive $\mu = h$, on peut écrire

$$\frac{X'}{H} = \sum pe^{-\mu x},$$

la somme $\sum$ s'étendant aux valeurs $\mu = h$, $h\sqrt{-1}$, $-h$, $-h\sqrt{-1}$.

D'après ce qui précède, il est clair que $\frac{X}{F'(\mu)}$ reste le même pour ces quatre substitutions, et, par conséquent, la valeur (31) de L pourra

s'écrire

$$(33) \qquad L = \sum \frac{Q e^{-\mu x'}}{F'(\mu)}, \qquad \text{où} \qquad Q = pX,$$

la somme $\sum$ étant la même que ci-dessus. Il reste à simplifier l'expression Q. Pour cela, d'après les valeurs de X et de p, on a

$$Q = \alpha M + \beta N, \qquad \alpha = \frac{f'(f'+g')}{2H}, \qquad \beta = \frac{g'(f'+g')}{2H}.$$

Comme on peut exprimer $\frac{g'}{H}$ sous forme entière, plutôt que $\frac{f'}{H}$, remarquons que l'on a identiquement

$$f'^2 + 4s^2 - g^2 = (2c+f)^2 + 4s^2 - g^2 = 8 + 4fc = 4F(\mu) = 0,$$

d'où

$$f'^2 = g(g - 2s), \qquad \alpha = \frac{g'(f'+g-2s)}{2H}, \qquad \beta = \frac{g'(f'+g+2s)}{2H},$$

qu'il vaut mieux remplacer par

$$\alpha + \beta = \frac{g'(f'+g)}{H}, \qquad \alpha - \beta = -\frac{2g's}{H}.$$

On a

$$fc + 2 = 0, \qquad s^2 = 1 - c^2 = 1 - \frac{4}{f^2} = \frac{g^2}{f^2}.$$

De plus

$$\frac{fs}{g} g' = \frac{fs}{g}(g + 2s) = \frac{2fs^2}{g} + fs,$$

ou, d'après la valeur de s^2,

$$\frac{fs}{g} g' = \frac{2g}{f} + fs = -gc + fs = -H, \qquad \frac{g'}{H} = -\frac{g}{fs}.$$

On a ainsi

$$\alpha + \beta = -\frac{g}{fs}(f'+g) = -\frac{f'}{f}\frac{g}{s} - \frac{g^2}{fs}, \qquad \alpha - \beta = \frac{2g}{f}.$$

On en fera disparaître les dénominateurs en substituant

$$\frac{f''}{f} = 1 + \frac{2c}{f} = 1 - c^2 = s^2, \qquad \frac{g^2}{fs} = fs, \qquad \frac{2}{f} = -c,$$

d'où

$$\alpha + \beta = -(g+f)s, \qquad \alpha - \beta = -gc.$$

L'équation $fc + 2 = 0$ donne

$$(1 + ce^{\mu}) = -(1 + ce^{-\mu}),$$
$$gc = (1 + ce^{\mu}) - (1 + ce^{-\mu}) = 2(1 + ce^{\mu}),$$

d'où résulte

$$\alpha + \beta = -2se^{\mu}, \qquad \alpha - \beta = -2(1 + ce^{\mu}),$$
$$Q = \alpha M + \beta N = -se^{\mu}(M + N) + (1 + ce^{\mu})(N - M),$$

ou, d'après les valeurs (32),

(34) $$\left\{\begin{aligned} Q = {} & (1 + ce^{\mu})(e^{\mu x} - \cos\mu x - \sin\mu x) \\ & - se^{\mu}(e^{-\mu x} + \sin\mu x - \cos\mu x). \end{aligned}\right.$$

C'est la formule cherchée.

14. Propriétés des variables imaginaires. — Dans ce qui suit, nous nous bornons à ce qui est nécessaire pour la question à résoudre.

1° *Définitions.* — Une variable imaginaire a la forme

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

où x, y sont des variables réelles. Une fonction $f(z)$ de cette variable est telle qu'on ait

$$f(z) = u + v\sqrt{-1},$$

u et v étant des fonctions réelles de x, y, satisfaisant aux conditions

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dv}{dx}\right) = -\left(\frac{du}{dy}\right),\\ &\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right),\\ &\text{ou}\\ &\frac{df(z)}{dy} = \sqrt{-1}\,\frac{df(z)}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Admettons pour simplifier que u et v soient bien déterminées, finies et continues pour toutes les valeurs finies de x, y, et qu'il en soit de même pour les dérivées précédentes; $f(z)$ sera ainsi bien définie pour toutes les valeurs de z, et nous supposerons qu'il en est de même pour la fonction $F(z)$ employée plus loin.

La dérivée $f'(z)$ signifie

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dx} = \frac{du}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dv}{dx},$$

et, d'après les relations (35), on a

$$\begin{aligned} d(u + v\sqrt{-1}) &= \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1}\right)dx + \left(\frac{du}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dv}{dy}\right)dy\\ &= \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1}\right)(dx + dy\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$df(z) = f'(z)\,dz.$$

2° *Théorème relatif à un contour.* — Considérons x, y comme les coordonnées rectangulaires d'un point variable, et soit C un contour fermé quelconque; les relations (34) donnent

$$\iint\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)dx\,dy = 0, \qquad \iint\left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right)dx\,dy = 0,$$

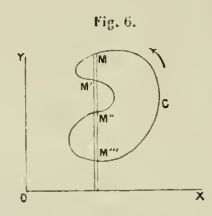
les intégrales s'étendant à l'aire intérieure au contour.

On a

$$dx\int\frac{du}{dy}\,dy = dx(u - u' + u'' - u'''),$$

u, u', u'', u''' correspondant aux points M, M', M'', M''' situés sur une même ordonnée, qui se réduisent à deux si le contour est convexe, et sont, en tout cas, en nombre pair. C'est la portion de l'aire intérieure

Fig. 6.



comprise entre deux ordonnées très voisines de distance dx; si maintenant on définit sur le contour dx, dy, comme étant les expressions positives ou négatives $\frac{dx}{ds}\,ds$, $\frac{dy}{ds}\,ds$, l'arc s étant compté dans le sens direct, ou celui de la flèche, les termes précédents seront pour la valeur et pour le signe $-u\,dx$, $-u'\,dx$, ..., d'où résulte

$$\int dx \int \frac{du}{dy}\,dy = -\int u\,dx,$$

l'intégrale du second membre s'étendant au contour. En interprétant de même les autres parties des intégrales, le résultat deviendra

$$\int v\,dy - \int u\,dx = 0, \qquad \int u\,dy + \int v\,dx = 0,$$

d'où

$$\int (u + v\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire

$$\int f(z)\,dz = 0, \tag{36}$$

l'intégrale s'étendant au contour.

Cette relation remarquable exige seulement que $f(z)$ soit bien définie à l'intérieur de l'aire. Par conséquent, si $F(z)$ est une autre fonc-

tion bien définie, on aura

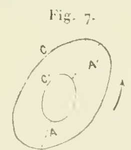
$$\frac{d\,\mathrm{F}(z)}{dy} = \sqrt{-1}\,\frac{d\,\mathrm{F}(z)}{dx}, \qquad \frac{d}{dy}\left[\frac{f(z)}{\mathrm{F}(z)}\right] = \sqrt{-1}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{f(z)}{\mathrm{F}(z)}\right],$$

et, pourvu que $\mathrm{F}(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur de l'aire, on aura pour le contour

$$\int \frac{f(z)\,dz}{\mathrm{F}(dz)} = 0.$$

Le principe reste applicable à l'aire comprise entre deux contours C, C' dont l'un est intérieur à l'autre; on le verrait aisément en la partageant en deux autres par les droites A, A' et ajoutant l'équation (36)

Fig. 7.



pour les aires partielles; les portions d'intégrales correspondant à A, A' se détruiraient; dans celle qui correspond au contour C', il serait parcouru en sens inverse. Cela revient à dire que l'intégrale $\int f(z)\,dz$ est la même pour les deux contours, si tous deux sont parcourus dans le sens direct.

3° *Cas où la fonction devient infinie dans l'intérieur de l'aire.* — La fonction dont il s'agit est $\frac{f(z)}{\mathrm{F}(z)}$, $f(z)$ et $\mathrm{F}(z)$ étant constamment finies; mais nous supposons que $\mathrm{F}(z)$ s'annule pour une valeur $z = \mu = a + b\sqrt{-1}$, correspondant à un point A, tandis que $\mathrm{F}'(\mu)$ n'est pas nulle.

Soit AL une droite ayant θ pour angle polaire, et sur cette droite M un point variable à la distance $\mathrm{AM} = \rho$; en supposant pour ce point $\mathrm{F}(z) = u + v\sqrt{-1}$, u et v seront des fonctions réelles de ρ, et l'on aura

$$\frac{du}{d\rho} = \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{d\rho} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{d\rho} = \left(\frac{du}{dx}\right)\cos\theta + \left(\frac{du}{dy}\right)\sin\theta.$$

Puisque u s'annule en A, pour $\rho = 0$, la valeur $\frac{du}{d\rho}$ en A est la limite de celle de $\frac{u}{\rho}$ quand ρ diminue; on a donc

$$\lim \frac{u}{\rho} = \left(\frac{du}{dx}\right)\cos\theta + \left(\frac{du}{dy}\right)\sin\theta, \qquad \lim \frac{v}{\rho} = \left(\frac{dv}{dx}\right)\cos\theta + \left(\frac{dv}{dy}\right)\sin\theta,$$

les dérivées correspondant au point A; il en résulte, d'après les relations (35),

$$\lim \frac{F(z)}{\rho} = \lim \frac{u + v\sqrt{-1}}{\rho} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1}\right)(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$
$$= F'(\mu)(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

ou

$$\lim \frac{\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)}{F(z)} = \frac{1}{F'(\mu)},$$

la limite supposant ρ infiniment petit. On voit que, pour des points suffisamment rapprochés de A, $F(z)$ ne peut s'annuler.

Soit maintenant

$$I = \int \frac{f(z)\,dz}{F(z)},$$

l'intégrale s'étendant à une circonférence de centre A, de rayon ρ. On a

$$x = a + \rho\cos\theta, \qquad y = b + \rho\sin\theta, \qquad dz = \rho(\sqrt{-1}\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta,$$

d'où

$$I = \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\theta\,\frac{\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)}{F(z)}.$$

Quand ρ est très petit, $f(z)$ diffère aussi peu qu'on voudra de $f(\mu)$, et l'autre facteur sous le signe $\int$ de $\frac{1}{F'(\mu)}$, d'où

$$\lim I = \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{f(\mu)}{F'(\mu)}\,d\theta = 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{F'(\mu)}{f(\mu)}.$$

Or, comme on l'a vu, l'intégrale I reste la même si on l'étend à un contour C quelconque renfermant le cercle, pourvu que $F(z)$ ne s'annule pour aucun point extérieur autre que A. On aura donc pour ce contour

$$\int \frac{f(z)\,dz}{F(z)} = 2\pi\sqrt{-1}\sum\frac{f(\mu)}{F'(\mu)}. \tag{37}$$

15. Application de ce qui précède a la formule (31). — Dans cette formule la somme $\sum$ s'étend à toutes les valeurs réelles et positives de μ; soit S sa valeur quand on l'étend seulement à celles qui sont inférieures à un grand nombre donné ρ. Nous supposerons que celui-ci soit un multiple exact de π, de façon à ne pouvoir être lui-même une des valeurs de μ qui sont de la forme $(2i+1)\frac{\pi}{2}$. Si l'on y remplace L par sa valeur (33) composée de quatre termes correspondant à $\pm\mu$, $\pm\mu\sqrt{-1}$, racines de même module, la somme $\sum$ s'étendra non plus seulement aux racines μ réelles et positives, mais à toutes les racines de $F(\mu)=0$ dont le module est inférieur à ρ. On aura ainsi

$$S = \sum\frac{f(\mu)}{F'(\mu)}, \qquad \text{où} \qquad f(\mu) = Q\int_0^1 \varphi(x)\,e^{-\mu x}\,dx.$$

Désignons par $F(z)$, $f(z)$ ce que deviennent $F(\mu)$ en remplaçant μ par une variable imaginaire z. Il est clair que de la sorte ces fonctions sont finies et bien déterminées pour toutes les valeurs de z. Enfin soit

$$I = \int \frac{f(z)\,dz}{F(z)},$$

l'intégrale s'étendant à un contour C pour lequel nous prendrons une circonférence de rayon ρ ayant pour centre l'origine. Pour chaque racine μ, μ', μ'', ..., le module est la distance de l'origine au point A, A', A'', ... qui lui correspond : pour l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à C, μ, μ', μ'', ... sont l'ensemble des racines dont le module est inférieur à ρ et auxquelles s'étend la somme S.

L'aire intérieure à C peut être partagée en plusieurs autres contenant chacune un seul des points A, A', A'', ... Appliquons au contour limitant chacune d'elles l'équation (37) et ajoutons les résultats. Dans le premier membre, toutes les portions d'intégrales correspondant aux lignes qui séparent deux aires voisines disparaissent, le sens où l'on compte dx, dy, dz étant contraire pour toutes deux. Il ne restera que les portions correspondant au contour C, et dont I est l'ensemble; on aura donc

$$I = 2\pi\sqrt{-1}\left[\frac{f(\mu)}{F'(\mu)} + \frac{f'(\mu')}{F'(\mu')} + \ldots\right]$$

ou

$$S = \sum \frac{f(\mu)}{F'(\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)\,dz}{F(z)}.$$

En désignant par θ l'angle polaire d'un point quelconque du contour,

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

$$dz = \left[-\rho\sin\theta + \sqrt{-1}\,\rho\cos\theta\right]d\theta$$
$$= \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1}\,d\theta = z\sqrt{-1}\,d\theta.$$

Substituons cette valeur de z, et, pour simplifier, remplaçons z par μ, qui deviendra ainsi une variable imaginaire. Nous aurons

$$(38)\qquad \begin{cases} S = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mu f(\mu)\,d\theta}{F(\mu)}, \\ f(\mu) = Q\displaystyle\int_0^1 \varphi(x')\,e^{-\mu x'}\,dx', \\ \mu = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

$F(\mu)$ et Q sont donnés par les formules (18) et (34). Il reste à démontrer que S converge vers $\varphi(x)$ quand ρ croît à l'infini.

Il est nécessaire, pour cela, d'avoir une limite inférieure du module de $F(\mu)$.

Soient r celui de f, r' celui de $2c$, et $\mu = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, de sorte que

$\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$. On a

$$f = e^{\mu} + e^{-\mu},$$

$$2c = 2\cos\mu = e^{\mu\sqrt{-1}} + e^{-\mu\sqrt{-1}} = (e^{\beta} + e^{-\beta})\cos\alpha + (e^{-\beta} - e^{\beta})\sqrt{-1}\sin\alpha,$$

par conséquent,

$$r^2 = e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2\cos 2\beta, \qquad r'^2 = e^{2\beta} + e^{-2\beta} + 2\cos 2\alpha.$$

Ces expressions étant indépendantes du signe de α, β, nous les remplacerons par α', β' qui désigneront leurs valeurs numériques. On aura ainsi

$$\alpha' = \rho\cos\theta', \qquad \beta' = \rho\sin\theta',$$

θ' étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ et ayant, sauf le signe, les mêmes sinus et cosinus que θ. Les valeurs ci-dessus donnent

$$r^2 e^{-2\alpha'} = 1 + e^{-4\alpha'} + 2\lambda > 1 + 2\lambda, \qquad \text{où} \qquad \lambda = \frac{\cos 2\beta'}{e^{2\alpha'}};$$

λ est positif si θ' est o ou $\frac{\pi}{2}$, car $2\beta'$ est alors o ou 2ρ, c'est-à-dire un multiple de 2π. Ainsi, en faisant varier θ', le minimum de $1 + 2\lambda$ ou le maximum négatif de λ ne peut correspondre qu'à une valeur de θ' satisfaisant à l'équation

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\lambda}{d\theta'} &= \frac{d}{d\theta'}(e^{-2\rho\cos\theta'}\cos 2\rho\sin\theta') \\ &= e^{-2\rho\cos\theta'}(2\rho\sin\theta'\cos 2\rho\sin\theta' - 2\rho\cos\theta'\sin 2\rho\sin\theta'). \end{aligned}$$

On aurait, en ce cas,

$$\sin(2\rho\sin\theta' - \theta') = 0, \qquad 2\rho\sin\theta' \qquad \text{ou} \qquad 2\beta = i\pi + \theta',$$

i étant entier; on doit le supposer impair pour que λ soit négatif, et il en résulte

$$\lambda = -\frac{\cos\theta'}{e^{2\rho\cos\theta'}}.$$

Or, x étant une variable positive, xe^{-x} a pour maximum $\frac{1}{e}$; en prenant $x = 2\rho\cos\theta'$, on voit que le maximum précédent de $-\lambda$ est au plus $\frac{1}{2\rho e}$.

Le calcul serait tout pareil pour r'^2, sauf qu'on aurait

$$\lambda = e^{-2\rho\sin\theta'}\cos(2\rho\cos\theta'),$$

et ce cas se ramène à l'autre en remplaçant θ' par $\frac{\pi}{2} - \theta'$. On a donc

$$r^2 > e^{2\alpha'}\left(1 - \frac{1}{\rho e}\right), \qquad r'^2 > e^{2\beta'}\left(1 - \frac{1}{\rho e}\right),$$

Le module de la somme de deux expressions étant supérieur à la différence de leurs modules, celui de $2F(\mu)$ ou $2fc + 4$, dépasse $rr' - 4$, et, par suite,

$$e^{\alpha'+\beta'}\left(1 - \frac{1}{\rho e} - \frac{4}{e^{\alpha'+\beta'}}\right).$$

Comme $\alpha' + \beta'$ ou $\rho(\cos\theta' + \sin\theta')$ est toujours au moins égal à ρ quand θ' est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, la quantité entre parenthèses devient aussi voisine qu'on veut de l'unité en prenant ρ assez grand. Nous pourrons supposer constamment ρ telle qu'elle dépasse $\frac{2}{3}$. Il en résulte que le module $F(\mu)$ est constamment supérieur à $\frac{1}{3}e^{\alpha'+\beta'}$, α' et β' étant les valeurs numériques de α et β.

16. Réduction de la formule (38). — Il est indifférent de prendre $-\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$ pour limites d'intégration, ou d'intégrer de $-\frac{1}{2}\pi$ à $\frac{1}{2}\pi$, puis de $\frac{1}{2}\pi$ à $\frac{3}{2}\pi$: si, dans cette seconde partie, on change θ en $\pi + \theta$, les limites seront de nouveau $\pm\frac{1}{2}\pi$, et μ aura simplement changé de signe. La formule (38) devient ainsi

$$2\pi S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu f(\mu) - \mu f(-\mu)}{F(\mu)}\,d\theta,$$

en remarquant que $F(-\mu) = F(\mu)$. Posons

$$(39)\qquad I = 1 + \mu\int_0^1 e^{-\mu x'}\varphi(x')\,dx', \qquad I' = \mu\int_0^1 e^{-\mu(1-x')}\varphi(x')\,dx',$$

et soit Q' ce que devient Q en remplaçant μ par $-\mu$. Les formules (38) donneront

$$\mu f(\mu) = IQ, \qquad \mu f(-\mu) = Q'\mu\int_0^1 \varphi(x')\,e^{\mu x'}\,dx' = I' e^{\mu} Q',$$

d'où

$$(40)\qquad 2\pi S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{IQ - I' e^{\mu} Q'}{F(\mu)}\,d\theta.$$

La valeur (34) peut s'écrire

$$Q = -\cos\mu x - \sin\mu x - e^{\mu}\cos\mu(1-x) + e^{\mu}\sin\mu(1-x)$$
$$- s e^{\mu(1-x)} + (1 + c e^{\mu})\,e^{\mu x},$$

d'où

$$(41)\quad \begin{cases} e^{\mu}Q' = e^{\mu}(\sin\mu x - \cos\mu x) - \cos\mu(1-x) - \sin\mu(1-x) \\ \qquad + s e^{\mu x} + (1 + c e^{-\mu})\,e^{\mu(1-x)}. \end{cases}$$

Dans le dernier terme de la valeur de Q nous substituerons

$$1 + ce^{\mu} = F(\mu) - (1 - ce^{-\mu}), \qquad \text{d'où} \qquad Q = e^{\mu x}F(\mu) + Q''.$$

$$(42)\quad \begin{cases} Q'' = -\cos\mu x - \sin\mu x - e^{\mu}\cos\mu(1-x) + e^{\mu}\sin\mu(1-x) \\ \qquad - s e^{\mu(1-x)} - e^{\mu x} - c e^{-\mu(1-x)}. \end{cases}$$

La valeur (40) se décomposera alors ainsi

$$(43)\quad \begin{cases} 2\pi S = S' + S'' - S''', \qquad S' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\mu x} I\,d\theta, \\ S'' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{IQ''}{F(\mu)}\,d\theta, \qquad S''' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I' e^{\mu} Q'}{F(\mu)}\,d\theta. \end{cases}$$

Nous allons vérifier que, si ρ croît à l'infini, S″ et S‴ décroissent sans limite. Nous regarderons x comme une constante comprise entre 0 et 1, et différente de ces deux limites, sauf à examiner plus tard le cas où l'on a $x = 0$ ou $x = 1$.

1° *Évaluation de* S″ *en excès.* — L'expression $\frac{\mathrm{I}Q''}{F(\mu)}$ est une fonction de μ ne contenant explicitement ni la lettre θ ni le signe $\sqrt{-1}$; en y substituant $\mu = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}$, elle prend la forme $U + U'\sqrt{-1}$, où U et U′ sont des fonctions réelles de θ; le changement de θ en $-\theta$, revient à substituer $\mu = \rho e^{-\theta\sqrt{-1}}$ ou à changer le signe de $\sqrt{-1}$, de sorte qu'on a en réalité

$$\tfrac{1}{2}S'' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} U\,d\theta.$$

Si, pour simplifier, nous désignons la valeur numérique de $\frac{1}{2}S''$ par $\frac{1}{2}S''$, nous en aurons une valeur trop forte en remplaçant U, non par la partie réelle de $\frac{Q''\mathrm{I}}{F(\mu)}$, mais par son module. Par conséquent,

$$(44) \qquad \tfrac{1}{2}S'' < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m\,P\,d\theta}{\operatorname{mod} F(\mu)},$$

m étant le module de I, P celui de Q″ pris trop forts.

Nous poserons $\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$, $\mu = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, et nous évaluerons P en ajoutant les modules de tous les termes de Q″ pris plutôt trop forts. Ainsi $2c$ ou $2\cos\mu$ a deux termes de module $e^{\pm\beta}$ que nous remplacerons par $2e^{\beta}$; c et s seront ainsi remplacés par e^{β}, et de même $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\mu x$ par $e^{\beta x}$, $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\mu(1-x)$ par $e^{\beta(1-x)}$. Quant aux exponentielles, on devra y remplacer μ par α. On trouve ainsi

$$P = 2e^{\beta x} + 2e^{\alpha}e^{\beta(1-x)} + e^{\alpha x} + e^{\beta}e^{\alpha(1-x)} + e^{\beta}e^{-\alpha(1-x)}.$$

Dans le numéro suivant nous déterminerons pour le module m de I une valeur en excès, indépendante de ρ et θ. Nous avons trouvé au n° **15** $\frac{1}{3}e^{\alpha'+\beta'}$ pour le module de $F(\mu)$ pris trop faible; α' et β' ont

d'ailleurs la signification actuelle de α et β; en faisant ces substitutions, la relation (44) deviendra, d'après la valeur de P,

$$\frac{3}{2m}\mathrm{S}'' < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2e^{-\alpha}e^{-\beta(1-x)} + 2e^{-\beta x} + e^{-\alpha(1-x)}e^{-\beta} + e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(2-x)}\right] d\theta.$$

Nous partagerons l'intégrale en deux autres, prises de o à $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$.

2° *Évaluation de la première partie.* — On a, pour celle-là,

$$\alpha = \rho\cos\theta > \frac{\rho}{2}$$

et, parmi les termes entre parenthèses, tous ceux où entre α convergent vers o quand ρ augmente, x et $1 - x$ étant des constantes positives. La portion qui reste au second membre correspond à $2e^{-\beta x}$ et peut s'écrire

$$2(\mathrm{M} + \mathrm{M}'), \qquad \mathrm{M} = \int_0^{\varepsilon} e^{-\beta x}\, d\theta, \qquad \mathrm{M}' = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} e^{-\beta x}\, d\theta,$$

où ε est un petit angle. Dans M' on a constamment

$$\beta = \rho\sin\theta > \rho\sin\varepsilon;$$

d'ailleurs $\mathrm{M} < \varepsilon$; par conséquent,

$$\mathrm{M} + \mathrm{M}' < \varepsilon + \frac{\pi}{4} e^{-\rho x \sin\varepsilon}.$$

Après avoir choisi ε aussi petit qu'on voudra, on peut toujours prendre ρ assez grand pour avoir

$$\frac{\pi}{4} e^{-\rho x \sin\varepsilon} < \varepsilon,$$

d'où

$$\mathrm{M} + \mathrm{M}' < 2\varepsilon.$$

Cette quantité décroît donc sans limite.

3° *Évaluation de la seconde partie.* — On a, pour celle-là,

$$\beta = \rho \sin\theta > \frac{\rho}{2};$$

les termes contenant β en exposant décroissent sans limite, et il reste au second membre

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(2-x)}]\, d\theta,$$

ou, en remplaçant θ par $\frac{\pi}{2} - \theta$,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} [e^{-\beta x} + e^{-\beta(2-x)}]\, d\theta,$$

et l'on vérifie, comme dans le cas précédent, que cette quantité converge vers o.

4° *Évaluation de* S‴. — En remplaçant x' par $1 - x'$ dans la valeur (39) de I′, elle ne diffère de I qu'en ce que $\varphi(x')$ est remplacé par $\varphi(1-x')$, et le module de I′ en excès serait m comme celui de I; ensuite on voit, par les formules (41) et (42), qu'en remplaçant x par $1 - x$ dans tous les termes de Q″, ils deviennent ceux de $Q'e^{\mu}$, quelques-uns en signe contraire; mais, ces signes étant tous positifs dans la valeur de P, celle qu'on trouverait en suivant la même marche que pour S″ ne différerait que par l'échange de x et $1 - x$, qui sont deux constantes quelconques entre o et 1. Le reste du calcul ne serait que la répétition de celui qui a été fait pour S″, et par conséquent S‴ converge aussi vers o.

17. Module de l'expression I. — 1° *Proposition préliminaire. Si une fonction $f(y)$ reste continue, positive et décroissante, pendant que y augmente de y' à y'', on a numériquement*

(45) $$\int_{y'}^{y''} f(y) \sin y\, dy < 2f(y').$$

En effet, partageons l'intégrale en d'autres A, A', A'', ... dont les limites successives soient, outre y', y'', tous les multiples de π compris entre ces deux nombres.

Chacune, sauf la première et la dernière, aura la forme

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(y) \sin y \, dy,$$

et comme $\sin y$ a un signe constant et que $f(y) < f(y')$, elle est numériquement moindre que $f(y') \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin y \, dy$, ou que $2f(y')$. Il en est de même évidemment pour la première et la dernière où la différence est $< \pi$.

Il est évident que A, A', ... sont de signes alternatifs et qu'à partir de A' elles sont numériquement décroissantes. Ainsi, numériquement, la somme $A' + A'' + A''' + \ldots$ est moindre que A' ou que $2f(y')$ et, en outre, elle a le signe de A' contraire à celui de A; celle-ci étant numériquement moindre que $2f(y')$, il en sera donc de même de la somme totale $A + A' + A'' + \ldots$.

2° *Conditions que* $\varphi(x)$ *doit remplir.* — Soit qu'il s'agisse du module de I ou du théorème principal que S ait $\varphi(x)$ pour limite, lequel doit être étendu même à une fonction discontinue, il y a forcément à exclure certains cas singuliers où la fonction présente plus ou moins certains caractères d'indétermination.

Voici les conditions qu'elle doit remplir :

Nous admettrons que *les valeurs de x pour lesquelles $\varphi(x)$ est discontinue sont en nombre limité,* de sorte qu'il y ait en tout de $x = 0$ à $x = 1$, n intervalles dans chacun desquels elle reste continue, n se réduisant à 1 quand il n'y a pas de discontinuité.

Nous admettrons, en outre, que dans chacun de ces intervalles *il y en a au plus n' dans chacun desquels la fonction reste constamment croissante ou constamment décroissante,* n' étant comme n un nombre fini.

3° *Module de* I. — Soit M le maximum numérique de $\varphi(x)$. Le module d'une somme étant inférieur à la somme des modules de ses termes, il en est de même si la somme devient une intégrale. Nous au-

rons donc en excès le module m de la valeur (39) de I en remplaçant les facteurs μ et $e^{-\mu x'}$ par leurs modules ρ, $e^{-\alpha x'}$ et $\varphi(x')$ par M, ce qui donne

$$m < \rho \mathrm{M} \int_0^1 e^{-\alpha x'}\, dx'.$$

Si

$$\theta < \frac{4}{\pi}, \qquad \alpha > \tfrac{1}{2}\rho, \qquad m < \mathrm{M}\rho \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\rho x'}\, dx, \qquad < 2\mathrm{M}.$$

Il ne reste donc à examiner que le cas où θ est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. En substituant $\mu = \rho e^{\theta\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on a

$$\mathrm{I} = \rho \int_0^1 e^{-\alpha x'} e^{-(\beta x' - \theta)\sqrt{-1}} \varphi(x')\, dx' = \rho(\mathrm{G} - \mathrm{G}'\sqrt{-1}), \qquad m = \rho\sqrt{\mathrm{G}^2 - \mathrm{G}'^2}$$

où

$$\mathrm{G} = \int_0^1 e^{-\alpha x'} \varphi(x') \cos(\beta x' - \theta)\, dx',$$

$$\mathrm{G}' = \int_0^1 e^{-\alpha x'} \varphi(x') \sin(\beta x' - \theta)\, dx'.$$

G et G′ rentrent toutes deux dans la forme générale

$$(46) \qquad \mathrm{G}'' = \int_0^1 e^{-\alpha x'} \varphi(x') \sin(\beta x' + \lambda)\, dx',$$

λ étant une constante. C'est de G″ que nous allons chercher la valeur, dans laquelle $\theta > \frac{\pi}{4}$, $\beta = \rho\sin\theta > \frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Soit d'abord

$$\mathrm{K} = \int_a^b e^{-\alpha x'} \varphi(x') \sin(\beta x' + \lambda)\, dx',$$

a et b étant deux nombres compris entre 0 et 1. Nous devons distinguer trois cas.

Premier cas. — Si, dans l'intervalle de $x' = a$ à $x' = b$, $\varphi(x')$ est continue, positive et décroissante, comme $e^{-\alpha x'}$ l'est aussi, si l'on pose

$\beta x' + \lambda = y$, K prendra la forme

$$K = \frac{1}{\beta}\int_{y'}^{y''} f(y)\sin y\,dy,$$

y' et y'' correspondant à a et b, et $f(y)$ étant une fonction positive, continue et décroissante, toujours inférieure à M. D'après la propriété préliminaire, on aura donc numériquement $K < \frac{2}{\beta}f(y') < \frac{2M}{\beta}$.

Deuxième cas. — Si $\varphi(x')$ reste, entre a et b, continue et décroissante (algébriquement), mais non toujours positive, K est la différence des résultats obtenus en y remplaçant $\varphi(x')$ par $M + \varphi(x')$ et M, qui toutes deux remplissent les conditions du premier cas; le maximum numérique de $M + \varphi(x')$ étant au plus $2M$, les deux résultats sont numériquement inférieurs à $\frac{4M}{\beta}$, $\frac{2M}{\beta}$, et, par suite, leur différence ou K, à $\frac{6M}{\beta}$.

Troisième cas. — Si de $x' = a$ à b, $\varphi(x')$ est continue, croissante, de signe quelconque, la valeur numérique de K ne changera pas en remplaçant $\varphi(x')$ par $-\varphi(x')$, et comme celle-ci est décroissante et remplit les conditions du second cas, cette valeur est encore inférieure à $\frac{6M}{\beta}$.

C'est donc la limite numérique de K si $\varphi(x')$ est dans l'intervalle de a à b, constamment croissante ou constamment décroissante, de signe quelconque. Or, d'après les conditions indiquées ci-dessus, pour la fonction $\varphi(x)$, il existe entre $x = 0$ et 1 au plus nn' intervalles dans chacun desquels $\varphi(x')$ est continue, constamment croissante ou décroissante. En partageant l'intégrale (46) en d'autres correspondant à tous ces intervalles, celles-ci auront toutes la forme K et, leur limite numérique étant $\frac{6M}{\beta}$, celle de G'' sera $\frac{6nn'M}{\beta}$; elle sera la même pour G et G'; d'ailleurs, on a vu que $\beta > \frac{\rho}{\sqrt{2}}$; par conséquent, on aura

$$m = \rho\sqrt{G^2 + G'^2} < \rho\sqrt{2}\,\frac{6nn'M}{\beta} < 12nn'M.$$

Cette valeur limite s'étend au cas où $\theta < \frac{\pi}{4}$, puisqu'on avait alors $m < 2M$. Ainsi m dépend seulement de n, n', M ou de la nature de $\varphi(x)$ et reste le même si on la remplace par $\varphi(1-x)$; le module de I' est, par conséquent, aussi $< m$.

18. Démonstration du théorème principal. — Ce théorème consiste en ce que la limite de S, quand ρ croît à l'infini, est $\varphi(x)$. Les limites de S'', S''' étant nulles, d'après ce qui précède, les formules (43) et (39) donnent

$$\lim 2\pi S = \lim S', \qquad S' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \mu e^{\mu(x-x')} \varphi(x')\, dx'\, d\theta.$$

En substituant $\mu = \rho e^{\theta\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on a

$$S' = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{\alpha(x-x')} e^{[\beta(x-x')+\theta]\sqrt{-1}} \varphi(x')\, d\theta\, dx'$$
$$= \int_0^1 (U + U'\sqrt{-1}) \varphi(x')\, dx',$$

où

$$U = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{\alpha(x-x')} \cos[\beta(x-x')+\theta]\, d\theta,$$

$$U' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{\alpha(x-x')} \sin[\beta(x-x')+\theta]\, d\theta.$$

Comme $\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$, il est clair que $U' = 0$, et

$$(x-x')U = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\{e^{\rho(x-x')\cos\theta} \sin[\rho(x-x')\sin\theta]\}$$

ou

$$U = \frac{2\sin\rho(x-x')}{x-x'},$$

et cette valeur reste exacte si $x - x' = 0$, celle de U se réduisant bien alors à 2ρ. Le théorème consiste donc en ce que

$$(47) \qquad \lim S = 2\pi\varphi(x), \qquad \tfrac{1}{2}S' = \int_0^1 \frac{\sin\rho(x-x')}{x-x'}\varphi(x')\,dx'.$$

Réduit à ces termes, le théorème revient, au fond, à la démonstration de la série trigonométrique de Lagrange, qu'ont donnée tour à tour Cauchy, Dirichlet et Bertrand. Toutefois, il reste dans ces démonstrations des points obscurs; et, en effet, le théorème n'existant que si la fonction $\varphi(x)$ est bien déterminée et supposant pour elle des propriétés de croissance et de décroissance, les démonstrations ne peuvent avoir une entière précision si l'on ne fixe d'avance, comme nous l'avons fait, les conditions exactes auxquelles la fonction est assujettie et qui seront les mêmes qu'au numéro précédent.

Le théorème peut alors être démontré rigoureusement comme il suit :

Nous supposons, comme précédemment, x différent de 0 et de 1; partageons l'intégrale (47) en deux autres, l'une de $x' = 0$ à $x' = x$, l'autre de $x' = x$ à $x' = 1$. Posons dans la première $x - x' = y$, $\varphi(x - y) = \psi(y)$, et dans la seconde $x' - x = y$, $\varphi(x + y) = \psi'(y)$, d'où

$$(48) \qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}S' = A + A', \\ A = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin\rho y}{y}\psi(y)\,dy, \\ A' = \displaystyle\int_0^{1-x} \frac{\sin\rho y}{y}\psi'(y)\,dy. \end{cases}$$

Presque toute la démonstration se réduit au cas principal suivant :

Cas principal. — Si de $y = 0$ à $y = x$, $\psi(y)$ est continue, décroissante et positive, la limite de A, quand ρ croît à l'infini, est $\frac{1}{2}\pi\,\psi(0)$.

En effet, remplaçons y par $\frac{y}{\rho}$ et posons $\psi(0) - \psi\left(\frac{y}{\rho}\right) = F(y)$; soit aussi n un entier positif choisi à volonté et donnons à ρ une valeur

telle que $\rho x > n\pi$; nous aurons identiquement

$$A = \int_0^{\rho x} \frac{\sin y}{y} \psi\left(\frac{y}{\rho}\right) dy = B - B' - B'' + B''',$$

où

$$B = \int_{n\pi}^{\rho x} \frac{\sin y}{y} \psi\left(\frac{y}{\rho}\right) dy, \qquad B' = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{y} F(y)\, dy,$$

$$B'' = \int_{n\pi}^{\infty} \frac{\sin y}{y} \psi(0)\, dy, \qquad B''' = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} \psi(0)\, dy.$$

En effet, il est clair que

$$B''' - B'' = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{y} \psi(0)\, dy,$$

$$B''' - B'' - B' = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{y} \psi\left(\frac{y}{\rho}\right) dy = A - B.$$

La fonction $f(y) = \frac{1}{y} \psi\left(\frac{y}{\rho}\right)$ étant, comme $\psi(y)$, positive, continue et décroissante, la valeur de B, d'après la proposition préliminaire du numéro précédent, est numériquement inférieure à $2f(y')$ où $y' = n\pi$. D'ailleurs les valeurs de $\psi\left(\frac{y}{\rho}\right)$ sont les mêmes que celles de $\varphi(x')$ et ont M pour maximum; le maximum numérique de B est donc $\frac{2M}{n\pi}$.

Nous aurons celui de B′ en remplaçant $F(y)$ par son maximum M′ et $\sin y$ par y de $y = 0$ à π, par 1 de $y = \pi$ à $n\pi$, d'où résulte numériquement

$$B' < M' \int_0^{\pi} dy + M' \int_{\pi}^{n\pi} \frac{dy}{y} = M'[\pi + l(n)].$$

D'ailleurs ψ étant décroissante, $F(y)$ ou $\psi(0) - \psi\left(\frac{y}{\rho}\right)$ a pour maximum, dans l'intervalle de l'intégration,

$$M' = \psi(0) - \psi\left(\frac{n\pi}{\rho}\right).$$

On a exactement

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y\, dy}{y} = \frac{1}{2}\pi, \qquad B''' = \frac{1}{2}\pi\psi(0).$$

Le principe à démontrer consiste en ce que, étant donné un nombre γ aussi petit qu'on voudra, la différence $A - \frac{1}{2}\pi\psi(0)$ ou $A - B'$ sera comprise entre $\pm\gamma$ dès que ρ aura dépassé une certaine valeur : or, $\int_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin y\,dy}{y}$ convergeant vers 0 quand n augmente, nous pouvons prendre n assez grand pour avoir $B'' < \frac{1}{3}\gamma$; nous pouvons le prendre en même temps assez grand pour avoir $\frac{2M}{n\pi} < \frac{1}{3}\gamma$ et, par suite, numériquement, $B < \frac{1}{3}\gamma$. Ensuite, $\psi\left(\frac{y}{\rho}\right)$ étant continue, M ou $\psi(0) - \psi\left(\frac{n\pi}{\rho}\right)$ décroît sans limite quand ρ augmente; ainsi, une fois n choisi, comme on vient de le dire, on aura, dès que ρ aura dépassé une certaine valeur, soit $\rho x > n\pi$ comme on l'a supposé, soit $M\,[\pi + l(n)] < \frac{1}{3}\gamma$, ou $B' < \frac{1}{3}\gamma$; alors B, B', B'' étant compris entre $\pm\frac{1}{3}\gamma$, $A - \frac{1}{2}\pi\psi(0)$ le sera entre $\pm\gamma$. C. Q. F. D.

Fin de la démonstration. — Nous allons vérifier que la limite de la valeur (48) de A est toujours $\frac{1}{2}\pi\psi(0)$.

1° Si de $y = 0$ à $y = x$, $\psi(y)$ est continue, toujours décroissante, mais non toujours positive : $M + \psi(y)$ sera positive; la limite de A est la différence de celles qu'on obtiendrait en remplaçant $\psi(y)$ par $M + \psi(y)$ et par M; toutes deux rentrent dans le cas principal; ces limites sont donc $\frac{1}{2}\pi[M + \psi(0)]$ et $\frac{1}{2}\pi M$, dont la différence est $\frac{1}{2}\pi\psi(0)$.

2° Si de $y = 0$ à x, $\psi(y)$ est continue et croissante, de signe quelconque, $-\psi(y)$ est décroissante et rentre dans le cas précédent. La limite de $-A$ est donc $-\frac{1}{2}\pi\psi(0)$.

3° Soient a, b deux nombres compris entre 0 et x, et supposons que $\psi(y)$ reste continue, constamment croissante ou décroissante quand y augmente de a à b, l'intégrale

$$T = \int_a^b \frac{\sin\rho y}{y}\psi(y)\,dy$$

aura alors pour limite 0 quand ρ augmente.

En effet, considérons la fonction $\psi(y)$ comme restant constante et égale à $\psi(a)$ quand y croît de 0 à a, on aura

$$T = T' - T'', \qquad T' = \int_0^b \frac{\sin\rho y}{y}\psi(y)\,dy, \qquad T'' = \int_0^a \frac{\sin\rho y}{y}\psi(y)\,dy.$$

T', T'' rentrant dans les cas précédents en prenant a ou b pour x et, comme pour chacune $\psi(0)$ a pour valeur $\psi(a)$, il en résulte

$$\lim T' = \lim T'' = \tfrac{1}{2}\pi\psi(a), \qquad \lim T = \lim T' - \lim T'' = 0.$$

4° *Cas général.* — Comme $\psi(y) = \varphi(x-y) = \varphi(x')$, $\psi(y)$ satisfait aux mêmes conditions que $\varphi(x')$; ainsi on peut partager l'intervalle de 0 à x en un nombre limité d'intervalles dans chacun desquels, comme de a à b, $\psi(y)$ reste continue et constamment croissante ou décroissante. En partageant l'intégrale A en d'autres correspondant à tous ces intervalles, toutes, sauf la première, auront, comme on vient de le voir, une limite nulle quand ρ augmente, tandis que celle de la première est $\frac{1}{2}\pi\psi(0)$; celle-ci est donc aussi la limite de A.

Tout ce qui précède est également applicable à la valeur (48) de A', dont la limite est ainsi $\frac{1}{2}\pi\psi'(0)$. D'ailleurs, il est clair que

$$\psi(0) = \psi'(0) = \varphi(x).$$

Les formules (48) donnent alors

$$\lim \tfrac{1}{2} S' = \pi\varphi(x),$$

c'est-à-dire la relation (47) qu'il s'agissait de démontrer. Toutefois, si pour la valeur de x la fonction $\varphi(x)$ était discontinue, passant brusquement de φ_1 à φ_2, il est clair qu'on trouverait

$$\lim A = \tfrac{1}{2}\pi\varphi_1, \qquad \lim A' = \tfrac{1}{2}\pi\varphi_2, \qquad \lim S' = \pi(\varphi_1 + \varphi_2).$$

19. Cas dans lesquels on a $x = 0$ ou $x = 1$. — Dans les deux cas l'une des valeurs (48) de A, A' est nulle, ce qui donnerait seulement

$$\lim S = \frac{\pi}{2}\varphi(0) \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}\varphi(1),$$

si les deux sommes S'', S''' avaient encore pour limite 0; mais il n'en est pas ainsi.

1° *Cas où $x = 0$.* — On a alors

$$X = 0,$$

et, par conséquent, la formule (31) donne 0 pour valeur initiale $\varphi(0)$. Il en est de même si on la transforme en employant la valeur (34) de Q, qui se réduit de même à 0.

2° *Cas où $x = 1$. Expression de S en intégrale relative à θ.* — La valeur (19) de X se réduit alors identiquement à $-2F'(\mu)$ comme on l'a déjà vu au n° **7**. Ainsi la valeur (31) de S, qui doit avoir $\varphi(x)$ pour limite, devient

$$-2\sum\int_0^1 \frac{X'\varphi(x')\,dx'}{F'(\mu)},$$

la somme s'étendant aux valeurs réelles et positives de μ.

Ensuite au n° **15** nous avons trouvé

$$\frac{X'}{F'(\mu)} = \sum p\,e^{-\mu x'} = \sum \frac{(f'+g')\,e^{-\mu c}}{2F'(\mu)};$$

la somme s'étendra aux quatre racines de même module.

Il en résulte

$$S = \sum P\int_0^1 \frac{e^{-\mu x'}\varphi(x')\,dx'}{F'(\mu)},$$

où

$$P = -f' - g' = -2(e^{\mu} + c + s).$$

Dans la formule (33), obtenue par un calcul moins simple, P était remplacé par Q; mais la valeur (34) de Q, comme on l'a vu au n° **16**, peut s'écrire en général

$$\begin{aligned} Q = &-\cos\mu x - \sin\mu x - e^{\mu}\cos\mu(1-x) \\ &+ e^{\mu}\sin\mu(1-x) - s e^{\mu(1-x)} + (1 + c e^{\mu})\,e^{\mu x}, \end{aligned}$$

et quand $x = 1$ se réduit à

$$-c - s - e^{\mu} - s + (1 + c e^{\mu})e^{\mu},$$

en substituant $1 + ce^{\mu} = -(1 + ce^{-\mu})$, elle coïncide avec la valeur ci-dessus de P.

La formule (38) devient ainsi

$$2\pi S = \int_0^{2\pi} \frac{\mu f(\mu)\, d\theta}{F(\mu)},$$

où

$$f(\mu) = P \int_0^1 \varphi(x') e^{-\mu x}\, dx'.$$

3° *Expression de S au moyen de* I, I′ *et vérification.* — En désignant par P′ ce que devient P quand on y remplace μ par $-\mu$, la valeur précédente de S se transforme, comme au n° **16**, en

$$(49)\quad \begin{cases} 2\pi S = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu f(\mu) - \mu f(-\mu)}{F(\mu)}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{PI - e^{\mu} P' I'}{F\mu}\, d\theta, \\ P = -2(e^{\mu} + c + s), \qquad P' e^{\mu} = -2(1 + ce^{\mu} - se^{\mu}), \end{cases}$$

On peut encore vérifier que la formule (43) coïncide avec la précédente, car, en écrivant S_1 au lieu de S, elle a la forme

$$2\pi S_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\mu} F(\mu) I + Q'' I' - Q' e^{\mu} I'}{F(\mu)}\, d\theta,$$

dans laquelle, pour $x = 1$, on a

$$Q'' = -2e^{\mu} - 2c - 2s = P,$$
$$e^{\mu} Q' = 2se^{\mu} + ce^{-\mu} - ce^{\mu} = P' e^{\mu} + F(\mu);$$

d'où

$$2\pi(S_1 - S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\mu} F(\mu) I - F(\mu) I'}{F(\mu)}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{\mu} I - I')\, d\theta,$$

ou, d'après les valeurs (39),

$$2\pi(S_1 - S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [e^{\mu(1-x')} - e^{-\mu(1-x')}] \mu \varphi(x') \, dx' \, d\theta.$$

Le premier terme est la valeur (43) de S′ pour $x = 1$, ou en y remplaçant $x - x'$ par $1 - x'$; le second est la même en remplaçant $x - x'$ par $x' - 1$. Mais, comme on l'a vu au n° **18**, quel que soit $x - x'$, on trouve en intégrant par rapport à θ,

$$S' = 2 \int_0^1 \frac{\sin \rho (x - x')}{x - x'} \varphi(x') \, dx',$$

et cette valeur reste la même soit qu'on y remplace $x - x'$ par $1 - x'$ ou par $x' - 1$; les deux termes de $2\pi(S_1 - S)$ sont donc égaux, d'où

$$S_1 = S.$$

4° *Valeur limite de* S. — Pour évaluer la valeur (49) remplaçons dans celle de $e^{\mu} P'$ l'expression $1 + ce^{\mu}$ par

$$F(\mu) - (1 + ce^{-\mu});$$

d'où

$$\tfrac{1}{2} e^{\mu} P' = - F(\mu) + 1 + c e^{-\mu} + s e^{\mu},$$

nous aurons

$$2\pi S = 2T - 2T',$$

(50)
$$\left\{ \begin{aligned} T &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I' \, d\theta, \\ T' &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + c e^{-\mu} + s e^{\mu}) I' + (e^{\mu} + c + s) I}{F(\mu)} \, d\theta. \end{aligned} \right.$$

Comme on l'a vu au commencement de ce numéro, les formules (48)

donnent, pour $x = 1$,

$$\lim \tfrac{1}{2} S' = \tfrac{1}{2}\pi\varphi(1),$$

et nous venons de voir que les intégrales T et S′ étaient les mêmes. On a donc

$$\lim T = \pi\varphi(1);$$

nous démontrerons au numéro suivant que $\lim T' = 0$; il en résultera pour S,

$$\lim 2\pi S = 2 \lim T = 2\pi\varphi(1), \qquad \lim S = \varphi(1).$$

Ainsi le théorème est exact quand $x = 1$. Il y a une exception apparente seulement quand $x = 0$; mais, comme on l'a vu, la tige étant encastrée, on ne peut supposer $\varphi(0)$ différente de 0.

Il est vrai qu'au n° **9** nous avons appliqué le théorème à un cas où $\varphi(x)$ était remplacé par la fonction Y, qui n'est point toujours nulle pour $x = 0$; mais, en employant les notations de ce numéro, Y_n aura bien pour limite Y, sauf une discontinuité accidentelle de la série pour $x = 0$, et, par conséquent, cela n'empêchera point le mouvement représenté par y d'être la limite de celui qui correspond à y_n.

20. Limite de T′. 1° *Réduction de* T′ *à un seul terme*. — Laissons de côté le terme $se^{\mu} I'$ du numérateur sous le signe $\int$. Quant aux autres, remplaçons I, I′ par leur module m, de même que les facteurs qui les multiplient, en les évaluant comme au n° **16**. En remplaçant θ par $-\theta$, ou $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$, les modules ne changent pas; il suffit donc d'intégrer de 0 à $\frac{1}{2}\pi$, en doublant le résultat. On aura ainsi

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1 + e^{\beta} e^{-\alpha} + e^{\alpha} + 2e^{\beta})m}{\operatorname{mod} F(\mu)}\, d\theta.$$

Or le module de $F(\mu)$ dépasse $\frac{1}{3} e^{\alpha+\beta}$ et en outre on a vu au n° **16** que $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha}\, d\theta$, $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha}\, d\theta$ ont des limites nulles; il en sera donc de

même de l'expression précédente. On peut donc réduire le numérateur à $se^{\mu}\mathrm{I}'$ et même ajouter le terme $se^{-\mu}\mathrm{I}'$ qui donnerait une limite nulle. Il en résulte

$$\mathrm{T}' = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sf\mathrm{I}'\,d\theta}{fc+2} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{s}{c}\mathrm{I}'\,d\theta - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2s\mathrm{I}'\,d\theta}{c(fc+2)}.$$

On verrait comme ci-dessus que le second terme a une limite nulle, en l'évaluant au moyen des modules et remarquant que celui de c, d'après le n° **15**, est supérieur à $\frac{1}{3}e^{\beta}$, β étant positif.

En substituant $\mu = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on a, θ étant positif,

$$\frac{s}{c} = \frac{\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\alpha-\beta\sqrt{-1})} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta\sqrt{-1})}{\mathrm{R}^2},$$

où R^2 est le module de c; soit aussi $\mathrm{I}' = v + v'\sqrt{-1}$, on pourra changer dans $\frac{\mathrm{S}}{c}\mathrm{I}'$ le signe de $\sqrt{-1}$, ajouter les résultats, et n'intégrer que de 0 à $\frac{1}{2}\pi$, ce qui donne

$$\mathrm{T}' = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{v\sin 2\alpha - \frac{1}{2}v'(e^{2\beta}-e^{-2\beta})}{\mathrm{R}^2}\,d\theta.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, puisque $\mathrm{R}^2 > \frac{1}{9}e^{2\beta}$, et que v, v' sont inférieurs à m, on peut supprimer au numérateur les termes $v\sin 2\alpha$, $\frac{1}{2}v'e^{-2\beta}$, les limites correspondantes étant nulles et par conséquent il est indifférent de les remplacer par $-v'\cos 2\alpha$, $-\frac{1}{2}v'e^{-2\beta}$, ce qui donnera

$$\mathrm{T}' = -\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{v'(\cos 2\alpha + \cos 2\beta\sqrt{-1})}{\mathrm{R}^2}\,d\theta$$
$$= -2\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{v'\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{\mathrm{R}^2}\,d\theta = -2\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} v'\,d\theta.$$

2° *Valeur de v' et* T'. — Il est préférable, dans la valeur (39) de I',

de remplacer $1-x'$ par y, $\varphi(x')$ ou $\varphi(1-y)$ par $F(y)$, de sorte qu'on aura

$$F(0)=\varphi(1).$$

Alors T′ sera déterminé par les relations

$$(51)\quad I=v+v'\sqrt{-1}=\int_0^1 \mu e^{-\mu y}F(y)\,dy,\qquad -\tfrac{1}{2}T'=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} v'\,d\theta.$$

En substituant $\mu=e^{\theta\sqrt{-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, on a

$$I=\rho\int_0^1 e^{-\alpha y}e^{-(\beta y-\theta)\sqrt{-1}}F(y)\,dy,$$

et le coefficient de $\sqrt{-1}$ est

$$v'=-\int_0^1 \rho e^{-\alpha y}\sin(\beta y-\theta)F(y)\,dy=\int_0^1 \frac{F(y)\,dy}{y}\frac{d}{d\theta}(e^{-\alpha y}\cos\beta y).$$

Il en résulte

$$-\tfrac{1}{2}T'=\int_0^1 \frac{\cos\rho y-e^{-\rho y}}{y}F(y)\,dy.$$

Remplaçons y par $\frac{y}{\rho}$ et posons

$$F\left(\frac{y}{\rho}\right)-F(0)=\psi(y):$$

nous aurons

$$-\tfrac{1}{2}T'=\int_0^{\rho}[F(0)+\psi(y)]\frac{\cos y-e^{-y}}{y}\,dy.$$

Le terme contenant $F(0)$ est la valeur que prend $-\frac{1}{2}T'$ quand $F(y)$ est constante et s'obtient plus simplement par les formules (51), qui donnent en ce cas

$$I=F(0)\int_0^1 \mu e^{-\mu y}\,dy=F(0)(1-e^{-\mu})=F(0)(1-e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}):$$

le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans cette expression, étant $e^{-\alpha}\sin\beta\, F(o)$, la valeur correspondante de $-\frac{1}{2}T'$ est

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(o)\, e^{-\alpha} \sin\beta\, d\theta.$$

Remplaçons par cette expression le terme en $F(o)$ de la valeur de $-\frac{1}{2}T'$, et partageons le reste de l'intégrale en deux autres, nous aurons

$$(52)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}T' = E + E' + E'', \\ E = F(o)\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\rho\cos\theta}\sin(\rho\sin\theta)\, d\theta, \\ E' = \displaystyle\int_0^{a} \frac{\cos y - e^{-y}}{y}\, \psi(y)\, dy, \\ E'' = \displaystyle\int_0^{\rho} \frac{\cos y - e^{-y}}{y}\, \psi(y)\, dy, \end{cases}$$

a étant un nombre quelconque compris entre o et ρ.

3° *Principe général.* — Quoique la démonstration suivante soit en partie la répétition de raisonnements déjà employés aux n^{os} **17** et **18**, il convient de la détailler, le principe étant plus général et comprenant les précédents.

Soit $f(y)$ une fonction dont les valeurs sont bien déterminées entre les limites A, B; admettons qu'entre ces nombres il existe i intervalles dans chacun desquels la fonction soit continue, constamment croissante ou décroissante.

Soit $f'(y)$ une autre fonction qui de A à B soit continue, positive et constamment décroissante; enfin soient N le maximum numérique de $f(y)$; a et b deux nombres compris entre A et B, et λ une constante quelconque.

On aura numériquement

$$(53)\qquad \int_0^b f(y) f'(y) \sin(y+\lambda)\, dy < 6 i N f'(a).$$

En effet, désignons le premier membre par H.

Premier cas. — Si de a à b, $f(y)$ est continue, positive et toujours décroissante, il en sera de même de $f(y)f'(y)$ et aussi de $f(y-\lambda)f'(y-\lambda)$ quand y varie de $a+\lambda$ à $b+\lambda$; en remplaçant y par $y-\lambda$, on a

$$H=\int_{b+\lambda}^{a+\lambda} f(y-\lambda)f'(y-\lambda)\sin y\,dy,$$

et, d'après la propriété préliminaire du n° **17**, on aura numériquement

$$H<2f(a)f'(a)$$

et, par suite,

$$H<2Nf'(a).$$

Deuxième cas. — Si $f(y)$ est continue, décroissante, mais non toujours positive, on aura

$$H=H'-H'',$$

H' et H'' se trouvant en remplaçant $f(y)$ par $N+f(y)$ ou N, qui, toutes deux, rentrent dans le premier cas; le maximum de $N+f(y)$ étant $2N$, on aura numériquement

$$H'<4Nf'(a),\qquad H''<2Nf'(a);$$

d'où

$$H<6Nf'(a).$$

Troisième cas. — Si $f(y)$ est continue, toujours croissante et de signe quelconque, $-f(y)$ sera décroissante, et l'on aura

$$6Nf'(a)$$

pour limite numérique de $-H$ et, par suite, de H.

4° *Cas général.* — Il existera entre a et b au plus i intervalles dans chacun desquels $f(y)$ sera continue, constamment croissante ou décroissante. En partageant l'intégrale H en d'autres qui leur correspondent, et remarquant que les valeurs de $f'(y)$ correspondant au

commencement des intervalles sont au plus égales à $f'(a)$, on aura

$$6N f'(a),$$

pour la limite numérique d'une intégrale partielle, et $bi N f'(a)$ pour celle de H.

C. Q. F. D.

5° *Limite de* T'. — Dans la valeur (52) de E'', si N est le maximum numérique de $\psi(y)$, on pourra appliquer la propriété (53) au terme

$$\int_a^\rho \frac{\sin(y+\frac{1}{2}\pi)}{y}\psi(y)\,dy,$$

en prenant $f'(y) = \frac{1}{y}$; sa limite numérique sera ainsi $\frac{6iN}{a}$; celle de

$$\int_a^\rho \frac{e^{-y}}{y}\psi(y)\,dy$$

est évidemment $\frac{N}{a}\int_a^\rho e^{-y}\,dy < \frac{N}{a}\cdot$ D'ailleurs $\psi(y) = F\left(\frac{y}{\rho}\right) - F(0)$, et cette fonction a les mêmes périodes de continuité croissante ou décroissante que $F(y)$; i est donc le nombre de périodes qui convient à $F(y)$ ou à $\varphi(x)$; en outre, $N =$ ou $< 2M$, M étant, comme précédemment, le maximum numérique de $F(y)$; celui de E'' est donc

$$\frac{2M(6i+1)}{a}.$$

Pour avoir celui de E', nous remplacerons $\psi(y)$ par son maximum M entre $y = 0$ et a, et $\frac{\cos y - e^{-y}}{y}$ par une valeur trop forte; de $y = 0$ à $y = 1$, ce sera son maximum M'' dans cet intervalle; de $y = 1$ à $y = a$, ce sera $\frac{2}{y}$: on aura ainsi numériquement

$$E' < M\int_0^1 M''\,dy + M'\int_0^a \frac{2\,dy}{y}$$

ou

$$E' < M[M'' + 2l(a)];$$

M'' est une quantité purement numérique inutile à déterminer; M' est le maximum de $F\left(\frac{y}{\rho}\right) - F(0)$ quand y varie de 0 à a; comme $F(y)$ est continue, ce maximum converge vers 0 quand $\frac{a}{\rho}$ diminue.

Ainsi, étant donné un nombre γ aussi petit qu'on voudra, on pourra prendre a assez grand pour avoir $\frac{2M(bi+1)}{a} < \frac{1}{2}\gamma$, et ensuite, a étant ainsi choisi, on prendra $\rho > a$ comme on l'a supposé et de façon à rendre $\frac{a}{\rho}$ assez petit pour avoir $M' < \frac{\frac{1}{2}\gamma}{M'' + 2l(a)}$; on aura alors numériquement

$$E' < \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad E'' < \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad E' + E'' < \gamma,$$

et, par conséquent, cette expression converge vers 0 quand ρ augmente.

Quant à la valeur (52) de E, en remplaçant le sinus par 1, on a, numériquement,

$$E < F(0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\rho\cos\theta}\, d\theta \qquad \text{ou} \qquad E < F(0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha}\, d\theta,$$

et nous avons déjà vu que $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha}\, d\theta$ converge vers 0 quand ρ augmente; il en sera donc de même pour E et, par suite, pour T'.

21. Complément de la démonstration de la convergence de la série (24) indiqué en note au n° **8**. — Il s'agit seulement de la première partie de cette série; en la désignant par S et posant $e^{-\mu}F'(\mu) = k$, on peut l'écrire

$$S = \sum \frac{e^{-\mu}X \int_0^1 e^{-\mu}X\varphi(x)\, dx \cos 6\mu^2 t}{k^2},$$

la somme Σ s'étendant aux valeurs réelles et positives de μ. La formule (19) donne

$$X = e^{\mu}(\sin\mu x - \cos\mu x + e^{-\mu x}) + e^{-\mu}(\sin\mu x + \cos\mu x - e^{\mu x})$$
$$+ c(e^{-\mu x} - e^{\mu x}) - 2\sin\mu(1 - x) + se^{-\mu x} + se^{\mu x}.$$

En remarquant que $-c$ est positif, moindre que $\frac{2}{e^{\mu}}$, les termes de X, sauf le premier et le dernier, ont pour limite numérique 3, 2, 2, 1, d'où

$$e^{-\mu}X = P + Le^{-\mu}, \qquad P = \sin\mu x - \cos\mu x + e^{-\mu x} + se^{-\mu(1-x)},$$

tandis que L est compris entre ± 8.

De là résulte qu'à partir d'une certaine valeur de μ on a constamment $e^{-\mu}X < 4$, et, en même temps, k^2 converge vers 1. Ainsi, en supprimant les termes en L, on laisse de côté des séries évidemment très convergentes, et en désignant par S′ le reste de S, on a

$$S' = \sum \frac{PQ\cos b\mu^2 t}{k^2},$$

$$Q = \int_0^1 [\sin\mu x - \cos\mu x + e^{-\mu x} + se^{-\mu x(1-x)}]\,\varphi(x)\,dx.$$

Or les deux derniers termes de cette expression, en remplaçant $\varphi(x)$ par son maximum M, sont inférieurs chacun à $\frac{M}{\mu}$; quant aux précédents, en y posant $\mu x = y$, chacun, d'après la propriété (53), en y faisant $f'(y) = 1$, est inférieur à $\frac{6iM}{\mu}$, i ayant la signification déjà indiquée pour $\varphi(x)$. On aura donc $Q = \frac{\lambda}{\mu}$, λ étant inférieur à une limite numérique commune à tous les termes de la série S′. Ces termes décroissent donc sans limite et de plus n'ont pas, en général, le même signe. Cela rend probable la convergence de la série, mais ne la démontre pas rigoureusement.

Cette démonstration semble fort difficile si on laisse à $\varphi(x)$ la même généralité qu'au numéro précédent, sans employer la dérivée de la fonction, en la supposant discontinue, etc.

Mais, d'autre part, les conditions auxquelles elle a été assujettie au n° **8** ne sont pas toutes nécessaires. Il suffit d'admettre que la fonction $\varphi(x)$ s'annule avec x, que de $x = 0$ à $x = 1$ elle reste continue, et que sa dérivée reste finie.

En effet, on a

$$\int \mathrm{P}\varphi(x)\,dx = \frac{\mathrm{P}'}{\mu}\varphi(x) - \frac{1}{\mu}\int \mathrm{P}'\frac{d\varphi(x)}{dx}\,dx,$$

$$\mathrm{P}' = se^{-\mu(1-x)} - e^{-\mu x} - \sin\mu x - \cos\mu x;$$

comme $\varphi(0) = 0$, il en résulte

$$\mu\mathrm{Q} = \mu\int_0^1 \mathrm{P}\varphi(x)\,dx = -(e^{-\mu} + c)\varphi(1) - \int_0^1 \mathrm{P}'\frac{d\varphi(x)}{dx}\,dx.$$

Comme numériquement $c < 2e^{-\mu}$, si l'on remplaçait $\mu\mathrm{Q}$ par son premier terme seul, la série S′ serait très convergente; quant au second, on verrait, comme ci-dessus, qu'il a la forme $\frac{\lambda}{\mu}$; la portion correspondante de la série S′ aurait donc ses termes de la forme $\frac{\mu^2}{\lambda}$ et serait convergente.

Sur la surface desmique du quatrième ordre;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

---

1. On dit que trois tétraèdres forment un système desmique lorsque les trois surfaces du quatrième ordre, formées respectivement par leurs faces, appartiennent à un même faisceau ponctuel, c'est-à-dire ont seize droites communes ([1]), et l'on appelle *surface desmique du quatrième ordre* toute surface de ce faisceau, c'est-à-dire, toute surface de degré quatre passant par les seize droites ([2]).

En choisissant convenablement les plans de référence, on peut mettre les équations des faces de chacun des tétraèdres sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} x-y=0, & x+y=0, & z-t=0, & z+t=0,\\ x-z=0, & x+z=0, & y-t=0, & y+t=0,\\ x-t=0, & x+t=0, & y-z=0, & y+z=0. \end{cases}$$

Nous désignerons ces douze plans sous le nom de *plans desmiques*.

Il est aisé de voir qu'on a identiquement

$$(x^2-y^2)(z^2-t^2)+(x^2-t^2)(y^2-z^2)+(x^2-z^2)(t^2-y^2)=0,$$

([1]) C. STEPHANOS, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, 2e série; 1879.

([2]) Cette surface et sa réciproque ont été étudiées par M. Stahl, dans le t. 101 du *Journal de Crelle*, et M. Waelsch, dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Vienne; 1887 et 1888.

ce qui montre bien que les trois tétraèdres forment un système desmique.

L'équation générale des surfaces desmiques du faisceau est

$$(x^2 - y^2)(z^2 - t^2) + k(x^2 - z^2)(y^2 - t^2) = 0,$$

ou, si l'on veut, sous une forme plus symétrique,

$$(2) \quad \lambda(x^2 y^2 + z^2 t^2) + \mu(x^2 z^2 + y^2 t^2) + \nu(x^2 t^2 + y^2 z^2) = 0,$$

λ, μ, ν étant trois paramètres liés par la relation

$$\lambda + \mu + \nu = 0.$$

Sous cette forme, on voit, en se reportant à des résultats bien connus, que la surface desmique est la transformée homographique de la réciproque du lieu des centres de courbure d'une quadrique.

La surface desmique a, quels que soient λ, μ, ν, douze points doubles, qu'on peut répartir comme il suit en trois groupes de quatre :

I.	$(0\ 0\ 0\ 1)$,	$(0\ 0\ 1\ 0)$,	$(0\ 1\ 0\ 0)$,	$(1\ 0\ 0\ 0)$,
II.	$(1\ 1\ 1\ 1)$,	$(1\ 1\ {-1}\ {-1})$,	$(1\ {-1}\ 1\ {-1})$,	$(1\ {-1}\ {-1}\ 1)$,
III.	$(1\ 1\ 1\ {-1})$,	$(1\ 1\ {-1}\ 1)$,	$(1\ {-1}\ 1\ 1)$,	$({-1}\ 1\ 1\ 1)$,

et que nous appellerons *points desmiques*. Ils sont situés trois à trois sur les seize droites qui forment la base du faisceau.

2. Le présent travail a pour but d'exposer des propriétés nouvelles de la surface desmique; il est divisé en quatre Parties.

Dans la première, exclusivement géométrique et fort courte, on établira quelques propositions simples et presque élémentaires, dont il sera fait un grand usage par la suite.

Dans la seconde, après avoir exposé un mode de représentation de la surface à l'aide des fonctions σ, on fera voir que certaines courbes tracées sur la surface desmique jouissent des propriétés angulaires des droites tracées sur le plan, et on en déduira une géométrie de la surface tout à fait analogue à la géométrie euclidienne du plan.

La troisième Partie est consacrée à l'étude des sections planes de la

surface : dans un Mémoire, inséré au Tome VI (4[e] série) de ce Journal, nous avons montré que la section plane d'une surface desmique n'est pas la courbe générale du quatrième ordre, et nous avons fait connaître de nombreuses propriétés de cette quartique particulière. Nous compléterons nos résultats antérieurs, et nous étudierons spécialement la section de la surface par un de ses plans tangents.

Enfin, dans la dernière Partie, nous rattacherons les surfaces desmiques à la surface générale du troisième ordre, par l'intermédiaire d'une proposition remarquable due à M. Cremona, et nous ferons connaître une dégénérescence intéressante de ces surfaces.

PREMIÈRE PARTIE.

3. Les douze points desmiques dont nous avons écrit plus haut les coordonnées, en les divisant en trois groupes, jouissent de propriétés intéressantes les uns par rapport aux autres. Nous n'en retiendrons ici qu'une seule; c'est que les huit points de deux quelconques des trois groupes sont les points fixes d'un réseau ponctuel de quadriques, et que chacun de ces réseaux comprend six couples de plans formés par des plans desmiques.

Prenons, par exemple, les huit points des groupes II et III; on vérifie aisément qu'ils sont les points fixes du réseau auquel appartiennent les six couples de plans :

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-z=0, \\ x+z=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-t=0, \\ x+t=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-z=0, \\ y+z=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y-t=0, \\ y+t=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z-t=0. \\ z+t=0. \end{cases}$$

Cela posé, considérons le complexe formé par les génératrices des quadriques de ce réseau.

Ce complexe est d'ordre trois, comme dans le cas général d'un réseau de quadriques, et, de plus, toute droite passant par un des huit points de base en fait partie.

Observons maintenant, en nous reportant à l'expression des coordonnées des points desmiques, que toute droite joignant un point du groupe I à un point du groupe II, passe toujours par un point du groupe III.

Il résulte de là que, parmi les quadriques qui passent par les points des groupes II et III, figureront tous les cônes ayant pour sommet un point quelconque du groupe I, et passant par les quatre droites qui joignent ce point aux points du groupe II. Comme on peut assujettir un de ces cônes à passer par une droite arbitraire issue de son sommet, on voit que le complexe des génératrices des quadriques menées par les points des groupes II et III comprendra toutes les droites issues d'un quelconque des points du groupe I. Il comprend déjà, comme on l'a dit, toutes les droites issues des points des deux autres groupes, d'où cette conséquence :

Les droites qui joignent un point quelconque de l'espace aux douze points desmiques sont sur un cône du troisième ordre.

De plus

Le complexe des génératrices des quadriques qui passent par les huit points desmiques de deux groupes ne change pas quand on permute l'un ou l'autre de ces groupes avec le troisième.

Car ce complexe est défini par le cône du troisième ordre dont l'existence vient d'être établie.

D'après ce qui a été dit sur les couples de plans desmiques qui font partie des réseaux considérés, on voit aussi que

Le complexe précédent comprend toutes les droites des douze plans desmiques (1).

4. Soit maintenant une surface desmique; elle admet les douze points desmiques pour points doubles.

---

(1) *Voir*, sur ce complexe, les Mémoires cités plus haut de MM. Stahl et Waelsch et aussi un très intéressant travail de M. Waelsch, publié au t. LII des *Nova acta* de l'Académie Leop.-Carol. de Halle.

Je dis que toute quadrique menée par les huit points desmiques de deux groupes coupe la surface suivant deux biquadratiques.

Soit en effet Q une telle quadrique, et C sa courbe d'intersection avec la surface : c'est une courbe d'ordre huit, ayant huit points doubles aux huit points desmiques considérés. Par ces huit points et par un neuvième point quelconque de l'espace on peut faire passer un faisceau de quadriques, car les huit points sont les points de base d'un réseau; si le neuvième point est sur C, on voit que les quadriques du faisceau coupent C en dix-sept points, et par suite passent toutes par C ou par une portion de C. Il en résulte aisément que C se décompose en deux biquadratiques, passant toutes deux par les huit points considérés.

Ainsi toute quadrique menée par ces huit points coupe la surface suivant deux biquadratiques, et réciproquement deux de ces biquadratiques sont sur une quadrique. Il existe donc sur la surface une série, simplement infinie, de biquadratiques passant par les points doubles de deux groupes; en combinant les trois groupes deux à deux, on obtient ainsi *trois séries de biquadratiques* tracées sur la surface.

La quadrique qui passe par deux biquadratiques d'une même série infiniment voisines est, à la limite, inscrite à la surface; il existe donc trois séries de quadriques inscrites à la surface le long de biquadratiques.

Nous dirons que les biquadratiques qui passent par les points doubles des groupes I et II, ainsi que les quadriques inscrites correspondantes, appartiennent au système (I, II); il y aura de même des biquadratiques et des quadriques inscrites des systèmes (I, III) et (II, III).

Il est clair que, par un point de la surface, passe une seule biquadratique de chaque série.

5. Revenons maintenant au complexe du troisième ordre défini plus haut.

Soit δ une droite quelconque de ce complexe, coupant la surface desmique aux points a_1, a_2, a_3, a_4. La droite δ étant, comme on sait, une génératrice d'une quadrique menée par les points doubles des groupes I et II, deux des points a, a_1 et a_2 par exemple, seront sur

une même biquadratique du système (I, II); de même a_3 et a_4 seront sur une autre biquadratique de ce système. Mais δ est aussi génératrice d'une quadrique passant par les points doubles des groupes I et III, d'après les propriétés démontrées du complexe; donc les couples a_1 et a_3, a_2 et a_4 seront respectivement sur une même biquadratique (I, III). Enfin les couples a_1 et a_4, a_2 et a_3 sont respectivement sur une même biquadratique (II, III).

Il résulte également de là que le complexe considéré du troisième ordre est formé par les cordes des biquadratiques tracées sur la surface.

Dans le cas particulier où δ est génératrice d'une quadrique inscrite, du système (I, II) par exemple, elle touche la surface desmique en deux points, situés sur une biquadratique de ce système. Il en résulte que a_1 coïncide avec a_3, et a_2 avec a_4, ou que a_1 coïncide avec a_4 et a_2 avec a_3. Dans le premier cas, les points de contact sont a_1 et a_4; comme ils sont, d'après ce qui précède sur une biquadratique du système (II, III), on voit que la droite δ est aussi génératrice de la quadrique du système (II, III) inscrite le long de cette biquadratique. De plus, les points a_1 et a_3 étant sur une biquadratique (I, III), la droite δ touche en a_1 la biquadratique de ce système qui passe par a_1; elle touche de même en a_4 la biquadratique (I, III) qui passe par a_4. Dans le second cas, on a des résultats semblables, les systèmes (I, III) et (II, III) étant permutés.

Il résulte aisément de ces considérations que les génératrices d'une série des quadriques inscrites du système (I, II) sont aussi génératrices des quadriques inscrites (I, III), tandis que leurs génératrices de l'autre série appartiennent aux quadriques inscrites (II, III).

En d'autres termes, les génératrices rectilignes des trois systèmes de quadriques inscrites forment trois congruences, et, dans chaque système, les génératrices appartiennent à deux de ces congruences.

De plus, les trois congruences sont identiques à celles que forment les tangentes aux trois séries de biquadratiques de la surface.

Nous avons ainsi établi géométriquement, avec un certain nombre de résultats nouveaux, les propriétés démontrées analytiquement à la fin du Mémoire précité, et qui nous avaient permis d'établir la propriété fondamentale des sections planes de la surface desmique. Ces pro-

priétés nous seront utiles dans la deuxième et dans la troisième Partie de ce Mémoire, en venant au secours de l'Analyse algébrique et en nous permettant d'arriver simplement à des formules de la théorie des fonctions elliptiques.

DEUXIÈME PARTIE.

6. Désignons par σu la fonction connue de M. Weierstrass, qui se rattache à la fonction pu définie par la relation

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3);$$

soient $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ les fonctions connues, dérivées de σu.

Considérons la surface définie, en fonction des deux paramètres u et v, par les relations

$$(3) \qquad \rho x = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_1 v}, \qquad \rho y = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_2 v}; \qquad \rho z = \frac{\sigma_3 u}{\sigma_3 v}, \qquad \rho t = \frac{\sigma u}{\sigma v},$$

où ρ est le facteur de proportionnalité. Cherchons son équation.

Des relations

$$(4) \qquad \sigma_1^2 + e_1\sigma^2 = \sigma_2^2 + e_2\sigma^2 = \sigma_3^2 + e_3\sigma^2,$$

on déduit d'abord, en tirant de (3) $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ et σu,

$$x^2\sigma_1^2 v + e_1 t^2\sigma^2 v = y^2\sigma_2^2 v + e_2 t^2\sigma^2 v = z^2\sigma_3^2 v + e_3 t^2\sigma^2 v:$$

égalant ces quantités à θ, tirant σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2 en fonction de σ^2 et θ et portant dans (4), il vient

$$\frac{1}{x^2}(\theta - e_1 t^2\sigma^2 v) + e_1\sigma^2 v = \frac{1}{y^2}(\theta - e_2 t^2\sigma^2 v) + e_2\sigma^2 v$$
$$= \frac{1}{z^2}(\theta - e_3 t^2\sigma^2 v) + e_3\sigma^2 v,$$

d'où, en éliminant θ et $\sigma^2 v$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & e_1(x^2 - t^2) \\ 1 & y^2 & e_2(y^2 - t^2) \\ 1 & z^2 & e_3(z^2 - t^2) \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(e_1 - e_3)(x^2y^2 + z^2t^2) + (e_2 - e_1)(x^2z^2 + y^2t^2) + (e_3 - e_2)(x^2t^2 + y^2z^2) = 0.$$

On reconnaît là l'équation (2) de la surface desmique.

Par suite, les coordonnées d'un point de cette surface sont définies par les équations (3).

Étudions ce mode de représentation.

On voit aisément, en désignant par 2ω et $2\omega'$ les périodes de pu, que les quotients deux à deux de x, y, z, t ne changent pas si l'on augmente u ou v de multiples de 4ω et $4\omega'$, ou si l'on change simultanément u et v de signe, ou si l'on augmente simultanément u et v de 2ω ou $2\omega'$. Ainsi à un point de la surface correspondent une infinité d'arguments compris dans les formules

$$(5) \qquad \begin{cases} \varepsilon u + 2k\omega + 2k'\omega' + 4h\omega + 4h'\omega', \\ \varepsilon v + 2k\omega + 2k'\omega' + 4h_1\omega + 4h'_1\omega', \end{cases}$$

ε désignant ± 1 et $k, k', h, \ldots, h'_1$ des entiers quelconques.

Les douze points doubles de la surface desmique s'obtiennent comme il suit :

Ceux du groupe I correspondent aux valeurs

$$0, \quad \omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega'$$

de v, quel que soit u.

Ceux du groupe II s'obtiennent en posant

$$u = v, \qquad u = v + \omega, \qquad u = v + \omega', \qquad u = v + \omega + \omega'.$$

Ceux du groupe III en posant

$$u = -v, \qquad u = -v + \omega, \qquad u = -v + \omega', \qquad u = -v + \omega + \omega'.$$

Les seize droites de la surface correspondent aux équations

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = 2k\omega + 2k'\omega', \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \omega, \\ v = \omega + 2k\omega + 2k'\omega', \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \omega', \\ v = \omega' + 2k\omega + 2k'\omega', \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \omega + \omega', \\ v = \omega + \omega' + 2k\omega + 2k'\omega', \end{cases}$$

où k, k' peuvent prendre les valeurs 0, 1.

7. Cherchons maintenant, en u et v, les équations des trois systèmes de biquadratiques de la surface.

Il est clair d'abord qu'en posant $v =$ const. on obtient des biquadratiques en vertu des équations (4); ces courbes passent par les points doubles des groupes II et III, que l'on obtient en donnant à u les valeurs $\pm v + h\omega + h'\omega'$; ce sont donc les biquadratiques (II, III).

Si l'on pose ensuite $u = v + \alpha$, α étant une constante, on obtient la courbe

$$\rho x = \sigma_1(v + \alpha)\sigma_2 v \sigma_3 v \sigma v,$$

$$\rho y = \sigma_1 v \sigma_2(v + \alpha)\sigma_3 v \sigma v,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les quotients de x, y, z, t deux à deux sont des fonctions doublement périodiques de v, aux périodes 2ω et $2\omega'$; comme x, y, z, t s'annulent quatre fois dans le parallélogramme 2ω, $2\omega'$, la courbe est du quatrième ordre : c'est par suite une biquadratique, puisqu'elle est de genre un.

Elle passe par les points doubles des groupes I et III, puisque l'équation $u = v + \alpha$ est compatible avec l'une et l'autre des équations $v = h\omega + h'\omega'$ et $u + v = h\omega + h'\omega'$: c'est donc une biquadratique (I, III).

De même on voit que les biquadratiques (I, II) ont pour équation $u + v = \alpha$.

Ainsi les trois systèmes de biquadratiques sont

$$v = \alpha, \qquad \text{(II, III)}$$

$$u - v = \alpha, \qquad \text{(I, III)}$$

$$u + v = \alpha. \qquad \text{(I, II)}$$

D'après ce qui a été dit plus haut, la courbe $v = \alpha$ est identique à

$$v = \pm\alpha + 2h\omega + 2h'\omega';$$

de même $u - v = \alpha$ est identique à

$$u - v = \pm\alpha + 4h\omega + 4h'\omega';$$

etc.

8. On comprend aisément quel intérêt il y aurait à trouver les relations qui doivent lier les arguments de quatre points de la surface pour que ces quatre points soient sur une même droite. Il ne semble pas que ce problème comporte de solution simple dans le cas général; mais il est possible de le résoudre aisément dans le cas où la droite appartient au complexe du troisième ordre formé par les cordes des biquadratiques (nº 5).

Soit δ une droite de ce complexe; désignons, comme au nº 5, par a_1, a_2, a_3, a_4 ses points d'intersection avec la surface, et par u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4 leurs couples d'arguments respectifs, définis à des multiples près de 4ω, $4\omega'$. Nous savons que a_2 et a_3 sont sur une même biquadratique du système (II, III), ainsi que a_1 et a_4; on a donc (nº **7**)

$$v_2 = \pm v_3 + 2h\omega + 2h'\omega';$$

mais, comme on peut *simultanément* changer les signes de u_3 et v_3 et augmenter u_3 et v_3 des mêmes multiples de 2ω, $2\omega'$, on peut poser

$$(a) \qquad \begin{cases} v_3 = v_2 \\ \quad \text{et de même} \\ v_4 = v_1. \end{cases}$$

Les points a_1 et a_3 sont sur une biquadratique (I, III); on peut donc écrire

$$(b) \qquad u_1 - v_1 = u_3 - v_3.$$

De même a_2 et a_4 sont sur une biquadratique (I, III); mais nous n'avons plus le droit d'écrire $u_2 - v_2 = u_4 - v_4$, parce que les équations qui précèdent ont fixé les signes de u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4; nous aurons donc

$$(b_1) \qquad u_2 - v_2 = \varepsilon(u_4 - v_4),$$

ε étant ± 1.

De même a_1 et a_2, a_3 et a_4 étant sur une biquadratique (I, II), on a

$$(c) \qquad \begin{cases} u_1 + v_1 = \varepsilon'(u_2 + v_2), \\ u_3 + v_3 = \varepsilon''(u_4 + v_4). \end{cases}$$

On en tire, en posant $u_1 - v_1 = u_3 - v_3 = \lambda$, et remplaçant u_1 et u_3 dans (c), en tenant compte de (a),

$$2v_1 + \lambda = \varepsilon'(u_2 + v_3),$$
$$2v_3 + \lambda = \varepsilon''(u_4 + v_1).$$

Résolvant par rapport à u_2, u_4 et portant dans (b_1), il vient enfin

$$\varepsilon'(2v_1 + \lambda) - 2v_3 = \varepsilon[\varepsilon''(2v_3 + \lambda) - 2v_1]$$

ou

$$(d) \qquad 2v_1(\varepsilon' + \varepsilon) + 2v_3(-\varepsilon\varepsilon'' - 1) + \lambda(\varepsilon' - \varepsilon\varepsilon'') = 0.$$

Or cette relation doit être une identité : la droite δ, en effet, dépend de trois paramètres, et, par suite, les arguments de ses quatre points d'intersection avec la surface desmique doivent pouvoir s'exprimer en fonction de trois indéterminées. Si donc (d) n'était pas une identité, on pourrait en tirer λ en fonction de v_1 et v_3, par exemple, et les équations (a), (b), (b_1), (c) permettraient d'exprimer tous les u et tous les v en fonction des deux paramètres v_1 et v_3, ce qui est impossible.

Donc (d) est une identité, et l'on a

$$\varepsilon' + \varepsilon = 0, \qquad \varepsilon\varepsilon'' + 1 = 0, \qquad \varepsilon' - \varepsilon\varepsilon'' = 0,$$

d'où

$$\varepsilon = 1, \qquad \varepsilon' = -1, \qquad \varepsilon'' = -1.$$

On a ainsi

$$v_3 = v_3, \qquad u_1 - v_1 = u_3 - v_3, \qquad u_1 + v_1 = -(u_2 + v_2).$$
$$v_4 = v_1, \qquad u_2 - v_2 = u_4 - v_4, \qquad u_3 + v_3 = -(u_4 + v_4).$$

Posons, pour la symétrie,

$$v_1 = \alpha, \qquad v_3 = -\beta,$$
$$v_1 + v_3 + \lambda = \mu,$$

il vient, en exprimant les u et les v en fonction de α, β, μ,

$$u_1 = \mu + \beta, \qquad u_4 = -\mu + \beta, \qquad u_2 = -\alpha - \mu, \qquad u_3 = \mu - \alpha.$$

et, par suite, on obtient pour les coordonnées des quatre points, en changeant simultanément les signes de u_1, v_1 ; u_2, v_3,

$$u_1 = \beta + \mu, \qquad u_4 = \beta - \mu, \qquad u_2 = \alpha + \mu, \qquad u_3 = \alpha - \mu,$$
$$v_1 = \alpha, \qquad v_4 = \alpha, \qquad v_2 = \beta, \qquad v_3 = \beta.$$

Telle est la forme, remarquablement simple, sous laquelle on peut mettre les arguments des quatre points communs à la surface desmique et à une droite du complexe; on en déduit de nombreuses et importantes conséquences, ainsi que nous le verrons dans la troisième Partie.

Pour le moment, nous nous bornerons à examiner quelques cas particuliers.

9. Nous savons que les droites du complexe, bitangentes à la surface, forment trois congruences; gardant les notations employées jusqu'ici, on obtiendra ces congruences en supposant que le point a_1 coïncide successivement avec l'un des points a_2, a_3, a_4, les deux autres points coïncidant également.

Pour que a_1 coïncide avec a_2 et a_3 avec a_4, il faut et il suffit qu'on ait

$$\alpha = \beta.$$

Les arguments des deux points de contact sont alors

$$\begin{cases} \alpha + \mu, \\ \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha - \mu, \\ \alpha, \end{cases}$$

ou, si l'on veut, les deux points d'arguments (u, v) et $(2v - u, v)$, sont les points de contact d'une même bitangente de la surface.

De même, en faisant coïncider a_1 avec a_3 et a_2 avec a_4, on voit que les points (u, v) et $(-2v - u, v)$ sont sur une bitangente.

Enfin, si a_1 coïncide avec a_4 et a_2 avec a_3, on trouve comme arguments des deux points de contact (u, v) et (v, u).

D'après cela, en joignant successivement le point (u, v) aux points $(2v - u, v)$, $(-2v - u, v)$, (v, u), on obtient trois bitangentes de la surface.

Nous dirons que :

Les bitangentes qui touchent la surface aux points (u, v) *et* (v, u) *sont du premier système;*

Celles qui touchent la surface aux points (u, v), $(-2v - u, v)$ *sont du second système;*

Celles qui touchent la surface aux points (u, v), $(2v - u, v)$ *sont du troisième système.*

Il est clair que ces propositions fournissent des formules de la théorie des fonctions elliptiques, qu'il serait peut-être difficile de démontrer directement.

10. Lorsque a_2 et a_3, a_1 et a_4 coïncident, la droite δ touche en a_2 et a_1 les biquadratiques (II, III) qui passent respectivement par ces points; la bitangente δ appartenant alors au premier système, ses points de contact sont (u, v) et (v, u); soit alors $v = \alpha$ une biquadratique (II, III); sa tangente au point (u, α) touche de nouveau la surface au

point (α, u), d'après ce qui précède; donc, lorsque le premier point de contact décrit la courbe $v = \alpha$, le second décrit la courbe $u = \alpha$.

Il résulte de là que la développable, qui a pour arête de rebroussement une biquadratique, $v = \alpha$, touche la surface desmique le long d'une courbe ayant pour équation $u = \alpha$; et, en vertu d'un théorème bien connu, *les deux séries de courbes*, $u =$ const., $v =$ const. *tracent sur la surface un réseau conjugué.*

De même, aux biquadratiques $u - v = \alpha$ correspondent les courbes conjuguées $3v + u = -\alpha$; et aux biquadratiques $u + v = \alpha$, les courbes conjuguées $3v - u = \alpha$.

Il est aisé de voir que les courbes $u = \alpha$ sont d'ordre douze et qu'elles passent par les douze points doubles de la surface.

Il en est de même des courbes $3v + u = \alpha$; $3v - u = \alpha$.

11. Nous connaissons sur la surface desmique trois réseaux conjugués; il est aisé d'en déduire l'équation différentielle des lignes asymptotiques.

Soit (u, v) un point de la surface; nous savons que les déplacements $du = 0$ et $dv = 0$; $du - dv = 0$ et $3dv + du = 0$ donnent respectivement deux directions conjuguées.

Par suite, on obtiendra les directions asymptotiques en prenant les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples $du = 0$ et $dv = 0$; $du - dv = 0$ et $3\,dv + du = 0$.

Soient dU et dV; dU_1 et dV_1 les déplacements qui correspondent à deux directions conjuguées quelconques; ils seront liés par une relation involutive

$$dU\,dU_1 + p(dU\,dV_1 + dU_1\,dV) + q\,dV\,dV_1 = 0.$$

Écrivons que cette relation est vérifiée pour $dU = 0$ et $dV_1 = 0$; puis pour $dU = dV$ et $3dV_1 + dU_1 = 0$; nous déterminerons p et q et nous trouverons

$$p = 0, \qquad q = 3.$$

La relation involutive est donc

$$dU\,dU_1 + 3\,dV\,dV_1 = 0. \tag{8}$$

Les directions asymptotiques s'obtiennent en faisant $dU = dU_1$ et $dV = dV_1$; on a ainsi

$$dU^2 + 3\,dV^2 = 0,$$

ce qui donne pour l'équation des asymptotiques

$$u + v\sqrt{-3} = \text{const.},$$
$$u - v\sqrt{-3} = \text{const.}$$

12. Remarquons ici que toutes les courbes que nous avons obtenues sur la surface desmique ont une équation de la forme

$$(9) \qquad gu + hv = \alpha,$$

g, h, α étant des constantes.

Les courbes représentées d'une manière générale par cette équation jouissent de propriétés remarquables.

Observons d'abord qu'elles sont algébriques lorsque le rapport $\frac{g}{h}$ est commensurable; en ce cas, elles sont même de genre un. En effet, admettons que g et h soient entiers; comme on a, pour tout point de la surface

$$\frac{x}{t} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_1 v}\,\frac{\sigma v}{\sigma u},$$

il vient, pour un point de la courbe, en posant $u = hU$,

$$\frac{x}{t} = \frac{\sigma_1(hU)}{\sigma(hU)}\,\frac{\sigma\left(\frac{\alpha}{h} - gU\right)}{\sigma_1\left(\frac{\alpha}{h} - gU\right)}$$

et des expressions analogues pour $\frac{y}{t}$ et $\frac{z}{t}$. Il résulte de là que la courbe est de genre un, en général; elle pourra devenir unicursale dans certains cas particuliers, par exemple si α est nul.

Si $\frac{g}{h}$ n'est pas commensurable, la courbe est généralement transcendante; mais on a toujours une expression simple des coordonnées de ses points à l'aide des fonctions elliptiques.

En général, les courbes $gu + hv = \alpha$ passent par tous les points doubles de la surface desmique; les biquadratiques seules font exception.

On peut donner de ces courbes un mode de génération intéressant et fondamental pour nos recherches.

Cherchons, en effet, sur la surface *les courbes telles qu'en chacun de leurs points la tangente forme, avec les tangentes aux trois biquadratiques passant par ce point, un faisceau de rapport anharmonique donné.*

Les tangentes aux biquadratiques correspondent aux déplacements $du = 0$; $du - dv = 0$; $du + dv = 0$; les coefficients de $\frac{du}{dv}$ dans ces équations sont 0, 1 et -1; la valeur de $\frac{du}{dv}$ qui correspond à la courbe cherchée est donc donnée par l'équation

$$\frac{\frac{du}{dv} - 1}{\frac{du}{dv} + 1} : \frac{-1}{1} = \text{const.},$$

d'où l'on tire

$$\frac{du}{dv} = \text{const.},$$

et, par suite, la courbe a pour équation

$$gu + hv = \alpha, \tag{9}$$

g, h, α étant des constantes, et $\frac{g}{h}$ dépendant du rapport anharmonique donné.

Si donc nous appelons *courbes linéaires* les courbes de la surface dont l'équation (9) est linéaire en u et v, nous pouvons dire que :

En chaque point d'une même courbe linéaire, la tangente forme, avec les tangentes aux trois biquadratiques passant par ce point, un faisceau de rapport anharmonique constant.

Pour des motifs qui seront expliqués plus loin, nous appellerons le rapport $\frac{g}{h}$ *coefficient angulaire desmique* de la courbe linéaire $gu + hv = \alpha$.

13. Il est clair que si g, h, α (ou leurs rapports) sont donnés, la courbe linéaire est définie sans ambiguïté sur la surface. Inversement, si la courbe linéaire est donnée sur la surface, $\frac{g}{h}$ est bien déterminé en vertu de la propriété qui précède, mais $\frac{\alpha}{h}$ ne l'est pas.

En effet, d'après ce qui a été dit au n° 6, une équation en u et v ne cesse pas de représenter, sur la surface desmique, la même courbe si l'on y remplace u et v respectivement par

$$\varepsilon[u + 2k\omega + 2k'\omega' + 4q\omega + 4q'\omega'],$$
$$\varepsilon[v + 2k\omega + 2k'\omega' + 4q_1\omega + 4q'_1\omega'].$$

Il en résulte que la courbe $gu + hv = \alpha$ est identique à la courbe

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} gu + hv = \pm\, \alpha &+ (2k\omega + 2k'\omega')(g + h) \\ &+ 4g(q\omega + q'\omega') + 4h(q_1\omega + q'_1\omega). \end{aligned} \right.$$

On voit ainsi que $\frac{\alpha}{h}$ peut prendre une infinité de valeurs.

Pour trouver l'intersection de deux courbes linéaires

$$gu + hv = \alpha, \qquad g_1 u + h_1 v = \alpha_1,$$

on combinera la dernière équation avec la série infinie des équations (10), où les entiers k, ..., q_1 prennent toutes les valeurs entières. Il en résulte que deux courbes linéaires, dont l'une au moins est transcendante, ont une infinité de points communs.

Nous savons que deux directions $\frac{dU}{dV}$ et $\frac{dU_1}{dV_1}$ sont conjuguées en un point lorsqu'on a

$$(8) \qquad dU\,dU_1 + 3\,dV\,dV_1 = 0.$$

Il en résulte qu'en un *quelconque* de leurs points communs les deux courbes

$$gu + hv = \alpha,$$
$$g_1 u + h_1 v = \alpha$$

sont conjuguées par rapport à l'indicatrice de ce point, si l'on a

$$3gg_1 + hh_1 = 0,$$

ou encore :

Les courbes $gu + hv = \alpha$, où α est seul variable, sont conjuguées en chaque point de la surface des courbes $hu - 3gv = \beta$.

Nous connaissons ainsi sur la surface une infinité de systèmes conjugués, transcendants ou algébriques, formés de courbes linéaires et, fait remarquable, deux courbes appartenant respectivement à deux systèmes conjugués sont conjuguées *en tous leurs points de rencontre*.

Ces propriétés permettent d'établir une liaison entre la théorie des droites dans le plan et celle des courbes linéaires sur la surface desmique. Avant de développer ce sujet, il importe de présenter quelques remarques.

14. Par un point de la surface desmique, on peut faire passer une et une seule courbe linéaire de coefficient angulaire desmique donné. Soit, en effet, u_0, v_0 ce point, la courbe linéaire demandée sera

$$gu + hv = gu_0 + hv_0,$$

et reste la même d'après (10) si l'on substitue à u_0 et v_0 les couples de valeurs équivalents.

Mais, par deux points de la surface desmique, u_0, v_0 et u_1, v_1, on peut faire passer une infinité de courbes linéaires. Le coefficient $\frac{g}{h}$ correspondant est, en effet, égal à

$$-\frac{v_1 - v_0}{u_1 - u_0};$$

il peut prendre une infinité de valeurs quand on augmente l'un des u ou des v de multiples de 4ω ou $4\omega'$; toutes les courbes linéaires ainsi obtenues sont différentes puisque les valeurs de $\frac{g}{h}$ le sont.

15. Cela posé, considérons un plan et deux axes de coordonnées rectangulaires dans ce plan.

A une droite $g\sqrt{3}x + hy = \alpha$ du plan, faisons correspondre, sur la surface desmique, la courbe linéaire $gu + hv = \alpha$.

On voit, d'après ce qui précède, que :

1° *A une droite correspond une et une seule courbe linéaire; à une courbe linéaire correspondent des droites parallèles entre elles, en nombre infini;*

2° *A une série de droites parallèles correspond une série de courbes linéaires de même coefficient angulaire desmique;*

3° *Aux deux séries de droites isotropes correspondent les deux séries de lignes asymptotiques de la surface;*

4° *A deux droites rectangulaires correspondent deux courbes linéaires conjuguées en tous leurs points de rencontre;*

5° *A quatre droites concourantes correspondent quatre courbes linéaires ayant un point commun et telles que le rapport anharmonique de leurs tangentes en ce point soit égal à celui du faisceau des quatre droites.*

D'après cela, si ρ est le rapport anharmonique du faisceau formé par les tangentes à deux courbes linéaires passant en un point, et par les directions asymptotiques de la surface au même point, et si l'on pose

$$\rho = e^{2i\theta},$$

θ sera l'angle des droites qui correspondent aux courbes linéaires considérées. Appelons *angle desmique* de deux courbes en un point la quantité θ ainsi définie; nous avons cette première propriété :

Deux courbes linéaires se coupent sous le même angle desmique en tous leurs points de rencontre.

Nous dirons, pour abréger, que des *courbes linéaires* sont *parallèles* si elles ont même valeur de $\frac{g}{h}$.

Il est évident maintenant que toute propriété angulaire euclidienne des droites d'un plan donnera une propriété correspondante sur la

surface desmique, en remplaçant le mot *droite* par le mot *courbe linéaire;* le mot *angle* par *angle desmique;* les mots *droites rectangulaires* par *courbes linéaires conjuguées.*

Ainsi :

Deux angles desmiques sont égaux, ou ont pour somme π, lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles.

Deux angles desmiques sont égaux, ou ont pour somme π, lorsque les côtés de l'un sont respectivement conjugués des côtés de l'autre.

Pour transformer les propriétés des triangles plans, il faut observer que trois courbes linéaires

$$gu + hv = \alpha, \qquad g_1 u + h_1 v = \alpha_1, \qquad g_2 u + h_2 v = \alpha_2$$

forment un *triangle desmique* dont les sommets ont pour arguments les valeurs de u et v tirées des trois équations précédentes, combinées deux à deux. En général, trois courbes linéaires forment une infinité de triangles; la règle précédente indique ce qu'on doit entendre par sommets d'un de ces triangles.

Cela posé, on peut dire que :

La somme des trois angles desmiques d'un triangle desmique est égale à π.

Si, par chaque sommet d'un triangle desmique, on mène la courbe linéaire conjuguée du côté opposé, ces trois conjuguées sont concourantes.

Le lieu du sommet mobile d'un triangle desmique dont la base est fixe et dont les deux angles desmiques à la base sont égaux, est une courbe linéaire, conjuguée de la base.

Si l'on mène les trois conjuguées qui correspondent respectivement aux trois côtés d'un triangle pris ainsi successivement pour base, ces conjuguées sont concourantes.

Appelons bissectrice desmique *d'un angle desmique la courbe linéaire passant par le sommet de l'angle, qui le partage en deux*

angles desmiques égaux : les bissectrices de deux angles desmiques adjacents sont conjuguées.

Les six bissectrices desmiques des angles desmiques d'un triangle et des angles adjacents se coupent trois à trois en quatre points.

Il serait aisé de donner d'autres exemples et, en particulier, d'étudier la courbe qui correspond à la circonférence; cette courbe est malheureusement toujours transcendante.

Nous nous bornerons aux propositions suivantes, déduites de la considération du cercle plan de rayon nul, auquel correspond un couple de lignes asymptotiques.

Soient A *et* B *deux points situés sur une même asymptotique de la surface; on mène par* A *une courbe linéaire quelconque et par* B *la courbe linéaire conjuguée de celle-ci : chacun des points d'intersection de ces deux courbes décrit une ligne asymptotique.*

Il en est de même si les deux courbes linéaires issues de A et B, au lieu d'être conjuguées, comprennent entre elles un angle desmique constant.

16. Nous avons trouvé, au n° **8**, pour expression des arguments de quatre points de la surface, situés sur une droite du complexe formé par les cordes des biquadratiques, les valeurs

$$\begin{array}{cccc} \beta+\mu, & \beta-\mu, & \alpha+\mu, & \alpha-\mu, \\ \alpha, & \alpha, & \beta, & \beta. \end{array}$$

De la forme de ces arguments dérivent immédiatement quelques propositions géométriques simples.

En premier lieu, nous voyons que, si α et μ sont donnés, la droite est une corde de la biquadratique $v=\alpha$ et sécante simple des deux conjuguées de cette biquadratique $u=\alpha+\mu$ et $u=\alpha-\mu$. Donc :

Si une corde d'une biquadratique donnée se déplace en s'ap-

puyant sur une des conjuguées de cette courbe, elle rencontre constamment une seconde conjuguée.

Les deux extrémités de la corde, sur la biquadratique, ont pour arguments $\beta+\mu$ et $\beta-\mu$, quantités dont la différence est la constante 2μ. Or on sait qu'une corde d'une biquadratique, dont les arguments elliptiques ont une différence constante, décrit une surface réglée d'ordre huit, *admettant la biquadratique pour ligne double;* on peut donc dire aussi que :

Le lieu des cordes d'une biquadratique donnée qui s'appuient sur une conjuguée de cette courbe est une surface d'ordre huit, passant par une seconde conjuguée.

Plus généralement, on voit, en raison de la forme linéaire en α, β, μ des arguments des quatre points, que, si une droite du complexe s'appuie sur deux courbes linéaires de la surface, ses deux autres points d'intersection avec la surface décrivent deux autres courbes linéaires.

Supposons, par exemple, que les deux premiers points, d'arguments $(\beta+\mu, \alpha)$ et $(\beta-\mu, \alpha)$, décrivent respectivement les deux courbes linéaires

$$gu+hv=\lambda \qquad \text{et} \qquad g_1u+h_1v=\lambda_1.$$

Soient u, v et U, V les coordonnées des deux autres points; on a

$$\begin{aligned} u&=\alpha+\mu, & \mathrm{U}&=\alpha-\mu,\\ v&=\beta, & \mathrm{V}&=\beta. \end{aligned}$$

Des relations

$$\begin{aligned} g\ (\beta+\mu)+h\alpha\ &=\lambda,\\ g_1(\beta-\mu)+h_1\alpha&=\lambda_1, \end{aligned}$$

on déduit, en exprimant α et β en fonction de u, v, μ ou en fonction de U, V, μ, les équations

$$\begin{aligned} gv\ +hu\ +\mu(g\ -h\ )-\lambda\ &=0,\\ g_1v-h_1u-\mu(g_1+h_1)-\lambda_1&=0 \end{aligned}$$

et

$$g\,V + h\,U + \mu(\quad g + h\,) - \lambda = o,$$
$$g_1 V + h_1 U + \mu(-g_1 + h_1) - \lambda_1 = o.$$

D'où l'on tire, en éliminant μ, les équations des lieux décrits par les points u, v et U, V :

$$(12)\quad \begin{cases} u(hg_1 + h_1 g) + v(2gg_1 + gh_1 - g_1 h) \\ \qquad = \lambda(g_1 + h_1) + \lambda_1(g - h), \\ U(hg_1 + h_1 g) + V(2gg_1 - gh_1 + g_1 h) \\ \qquad = \lambda(g_1 - h_1) + \lambda_1(g + h). \end{cases}$$

Ce sont deux courbes linéaires, dont les coefficients angulaires desmiques dépendent seulement des coefficients angulaires desmiques, $\frac{g}{h}$ et $\frac{g_1}{h_1}$ des deux premières courbes.

Si les deux premières courbes sont parallèles, les deux nouvelles le sont également.

Observons maintenant que λ et λ_1, d'après (10), peuvent prendre une infinité de valeurs; il est aisé de voir que ces valeurs, portées dans les équations (12), donnent généralement des couples de courbes, différentes de celles obtenues d'abord, mais restant toujours parallèles à celles-ci.

De cette analyse résultent les théorèmes suivants :

Soient deux courbes linéaires, A *et* B, *de la surface desmique; on les coupe par une biquadratique de la surface, appartenant à une série donnée, et l'on joint les points d'intersection situés sur la première aux points d'intersection situés sur la seconde; les droites ainsi obtenues engendrent, quand la biquadratique varie, une surface réglée, dont l'intersection avec la surface desmique, en dehors des courbes* A *et* B, *se décompose en couples de courbes linéaires* C *et* D, C_1 *et* D_1, ...

Les courbes linéaires d'un de ces couples sont respectivement parallèles aux courbes des autres couples; ainsi les courbes C, C_1, ... *sont parallèles entre elles; de même les courbes* D, D_1, ...

Si les courbes primitives, A *et* B, *sont parallèles entre elles, toutes les courbes* C *et* D *sont parallèles entre elles.*

Les deux courbes A et B peuvent coïncider :

Si l'on coupe une courbe linéaire de la surface desmique par une biquadratique d'une série donnée et si l'on joint deux à deux les points d'intersection, les droites ainsi obtenues engendrent, lorsque la biquadratique varie, une surface réglée dont l'intersection avec la surface desmique, en dehors de la courbe linéaire primitive, se décompose en une série de courbes linéaires, toutes parallèles entre elles.

17. La théorie des bitangentes nous a fait connaître trois transformations de la surface en elle-même : chacune de ces transformations fait correspondre à un point de la surface le second point de contact d'une bitangente issue de ce point. Nous avons ainsi trois transformations univoques et réciproques, dont nous connaissons l'expression analytique : en effet, d'après les résultats du nº 9, à un point (u, v) correspondent, par les trois transformations, les points

$$(v, u), \quad (-2v - u, v), \quad (2v - u, v).$$

En combinant d'une manière quelconque ces transformations, on obtient de nouvelles transformations linéaires univoques, formant un groupe *continu*.

La théorie de ce groupe revient à celle des lignes brisées qui sont à la fois inscrites et doublement circonscrites à la surface et sur lesquelles on pourrait énoncer de nombreuses propositions. Nous n'entreprendrons pas ici cette étude; nous nous bornerons à faire observer que toutes les transformations du groupe font correspondre à une courbe linéaire une autre courbe linéaire.

Plus généralement, il en est de même des transformations qui remplacent u et v par $\lambda u + \mu v$ et $\lambda' u + \mu' v$.

Parmi ces transformations, il en est qui conservent les angles desmiques : en se reportant à la représentation géométrique plane des courbes linéaires, on voit qu'elles correspondent aux substitutions

orthogonales et qu'elles sont de la forme

$$U = bu - 3av,$$
$$V = au + bv.$$

Si a et b sont entiers, cette transformation fait correspondre à un point (u, v) un seul point U, V; inversement à (U, V) correspondent, en général, plusieurs points (u, v) en nombre fini.

Un cas particulier est à signaler, en raison de propriétés importantes, liées à une autre théorie que nous rencontrerons plus loin; c'est le suivant :

Proposons-nous de déterminer a et b de telle façon que, le point (u, v) décrivant une courbe linéaire quelconque, le point (U, V) décrive une courbe linéaire conjuguée.

Si l'on a

$$gu + hv = \alpha,$$

il vient pour la courbe du point (U, V)

$$g(bU + 3aV) + h[bV - aU] = \alpha[b^2 + 3a^2],$$

et les deux courbes seront conjuguées si l'on a (**15**)

$$3g[bg - ah] + h[3ag + bh] = 0,$$

c'est-à-dire,

$$b[3g^2 + h^2] = 0.$$

La courbe $gu + hv - \alpha = 0$ devant être quelconque, il faut et il suffit qu'on ait $b = 0$ et la transformation devient

$$U = -3av, \qquad V = au.$$

Le cas le plus simple est celui où $a = 1$; il vient alors

$$U = -3v, \qquad V = u.$$

Pour des motifs que l'on comprendra plus tard, nous dirons que le point $(-3v, u)$ est *le tangentiel* du point (u, v).

Un point a un seul tangentiel, mais il est clair qu'à un tangentiel donné correspondent *neuf* points. On voit aisément que :

Si un point se meut sur une asymptotique, son tangentiel décrit une asymptotique de la même série ;

et, plus généralement, d'après ce qui précède :

Quand un point décrit une courbe linéaire, son tangentiel décrit une courbe linéaire conjuguée de la première.

TROISIÈME PARTIE.

18. Après les courbes linéaires, il est intéressant d'étudier les sections planes de la surface desmique ; elles jouissent, comme nous l'avons fait voir ailleurs, de propriétés remarquables, qui en font une classe spéciale parmi les courbes du quatrième ordre. Nous ne reviendrons pas ici sur les propriétés que nous avons établies ; nous nous bornerons à les compléter, en ce qui concerne la section par un plan quelconque ; nous étudierons ensuite la section de la surface par un plan tangent.

Il est clair, tout d'abord, que la section de toute surface desmique d'ordre quatre par un plan quelconque est une *courbe desmique*, c'est-à-dire appartient à un faisceau de quartiques comprenant trois systèmes de quatre droites : ces systèmes de quatre droites sont les sections, par le plan, des faces des trois tétraèdres desmiques. Il est remarquable que la section plane de la surface desmique peut être regardée d'une infinité de manières comme une courbe desmique. Les considérations suivantes vont mettre ce point en évidence.

Soient, en effet, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des quantités quelconques et soient, sur la surface desmique, les seize points dont les arguments u et v sont inscrits au Tableau ci-dessous :

$\beta+\gamma+\delta,\ \alpha$	$\beta-\gamma-\delta,\ \alpha$	$\alpha+\gamma+\delta,\ \beta$	$\alpha-\gamma-\delta,\ \beta$
$\gamma-\delta-\beta,\ \alpha$	$\delta-\gamma-\beta,\ \alpha$	$\delta-\alpha-\gamma,\ \beta$	$\gamma-\delta-\alpha,\ \beta$
$\alpha+\beta+\delta,\ \gamma$	$\delta-\alpha-\beta,\ \gamma$	$\alpha+\beta+\gamma,\ \delta$	$\gamma-\alpha-\beta,\ \delta$
$\alpha-\beta-\delta,\ \gamma$	$\beta-\delta-\alpha,\ \gamma$	$\beta-\gamma-\alpha,\ \delta$	$\alpha-\beta-\gamma,\ \delta$

Désignons ces points par $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{44}$, selon la notation usuelle des déterminants, le premier indice désignant la ligne et le second la colonne.

En se reportant à l'expression des arguments des quatre points situés sur une corde de biquadratique, à savoir :

$$(u) \qquad a+\mu, \quad a-\mu, \quad b+\mu, \quad b-\mu,$$
$$(v) \qquad b, \quad b, \quad a, \quad a,$$

on voit immédiatement que :

1° Les quatre points dont les arguments sont sur une même ligne du Tableau, $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}$, sont sur une même droite; cette droite appartient au complexe du troisième ordre formé par les cordes des biquadratiques.

2° Il en est de même des quatre points dont les arguments sont sur une même colonne du Tableau.

3° Il en est de même, enfin, des groupes de quatre points :

$$a_{14}, \quad a_{23}, \quad a_{32}, \quad a_{41};$$
$$a_{13}, \quad a_{24}, \quad a_{31}, \quad a_{42};$$
$$a_{12}, \quad a_{21}, \quad a_{34}, \quad a_{43};$$
$$a_{11}, \quad a_{22}, \quad a_{33}, \quad a_{44}.$$

Observons maintenant que les quatre points

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{21}, \quad a_{22}$$

sont dans un même plan : ils sont en effet sur une même biquadratique $v = \alpha$, et leurs arguments u ont une somme nulle.

On conclut de là, en s'appuyant sur les propriétés qui précèdent, que les seize points considérés sont dans un même plan; ils sont à l'intersection d'un premier système de quatre droites avec un deuxième système de quatre droites, et sont aussi situés, quatre à quatre, sur quatre nouvelles droites.

Cette remarque fournit une propriété de toute section plane de la surface desmique : en effet, étant donnés un plan quelconque et une

biquadratique $v=\alpha$, on désignera par $\beta+\gamma+\delta$, $\beta-\gamma-\delta$, $\gamma-\delta-\beta$, $\delta-\gamma-\beta$, les arguments u, dont la somme est nulle, des quatre points d'intersection de ce plan avec la biquadratique; β, γ, δ sont alors déterminés, ainsi que α, et par suite, on a les arguments des seize points. A chaque biquadratique $v=\alpha$ correspond ainsi un système de seize points dans le plan. Donc :

Les points de la section plane d'une surface desmique se répartissent en une infinité simple de groupes de seize points, tels que par les seize points de chaque groupe passent trois systèmes de quatre droites.

Les douze droites qui correspondent ainsi à un système de seize points appartiennent au complexe du troisième ordre formé par les cordes des biquadratiques; elles touchent donc une courbe de troisième classe. Par suite :

Ces droites ont pour enveloppe une courbe de troisième classe.

Cette courbe est celle que nous avons étudiée, sous le nom de *cayléenne*, dans notre Mémoire souvent cité.

Pour former, sur la section plane, les groupes de seize points dont nous venons d'établir l'existence, il suffit, d'après ce qui précède, de prendre les quatre points d'intersection de la courbe avec une biquadratique $v=\alpha$, et de mener les six droites qui joignent les quatre points deux à deux; ces droites coupent de nouveau la quartique en douze points, qui, joints aux quatre premiers, forment un des groupes cherchés.

Or les quatre points où un plan coupe une biquadratique sont sur une conique, section de la quadrique inscrite à la surface desmique le long de la biquadratique (4) et qui, par suite, touche la quartique en ces quatre points. Si l'on se reporte au Mémoire précité, on voit ainsi que :

Les seize points d'un groupe sont à l'intersection de la quartique avec les six droites qui joignent deux à deux les quatre points de

contact de la courbe et d'une conique appartenant à l'un des trois systèmes remarquables de coniques quadritangentes.

19. Les trois systèmes de quatre droites passant par les seize points d'un groupe jouissent, par rapport à leur enveloppe, de propriétés intéressantes.

Cette enveloppe, que nous appellerons C, étant une courbe de troisième classe, on peut faire correspondre à chacune de ses tangentes un argument elliptique, de telle sorte que les arguments des trois tangentes issues d'un même point aient une somme nulle, à des multiples près des périodes Ω, Ω'.

Cela posé, considérons un de nos groupes de seize points; et soient a_1, a_2, a_3, a_4 les arguments elliptiques des droites qui correspondent aux lignes du Tableau du n° **18**; b_1, b_2, b_3, b_4 ceux des droites qui correspondent aux colonnes; c_1, c_2, c_3, c_4 ceux des quatre autres droites qui passent par les seize points, dans l'ordre où elles ont été énumérées plus haut. Écrivons maintenant que les arguments des trois droites qui passent par le point a_{11}, puis par les points $a_{12}, \ldots, a_{44}$, ont une somme nulle, on a

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_4 &\equiv 0, \quad \mathrm{mod}(\Omega, \Omega') \\ a_1 + b_2 + c_3 &\equiv 0, \\ a_1 + b_3 + c_2 &\equiv 0, \\ a_1 + b_4 + c_1 &\equiv 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{array}{lll} a_2 + b_1 + c_3 \equiv 0, & a_3 + b_1 + c_2 \equiv 0, & a_4 + b_1 + c_1 \equiv 0, \\ a_2 + b_2 + c_4 \equiv 0, & a_3 + b_2 + c_1 \equiv 0, & a_4 + b_2 + c_2 \equiv 0, \\ a_2 + b_3 + c_1 \equiv 0, & a_3 + b_3 + c_4 \equiv 0, & a_4 + b_3 + c_3 \equiv 0, \\ a_2 + b_4 + c_2 \equiv 0, & a_3 + b_4 + c_3 \equiv 0, & a_4 + b_4 + c_4 \equiv 0. \end{array}$$

On déduit de ces relations

$$\begin{aligned} 2a_1 &\equiv 2a_2 \equiv 2a_3 \equiv 2a_4, \\ 2b_1 &\equiv 2b_2 \equiv 2b_3 \equiv 2b_4, \\ 2c_1 &\equiv 2c_2 \equiv 2c_3 \equiv 2c_4. \end{aligned}$$

On peut donc poser, a étant un nouvel argument,

$$a_1 = -a, \qquad a_2 = -a + \frac{\Omega}{2}, \qquad a_3 = -a + \frac{\Omega'}{2}, \qquad a_4 = -a + \frac{\Omega + \Omega'}{2},$$

et, en combinant ces relations avec les premières, on trouve, en désignant par b et c deux nouveaux arguments,

$$b_1 = -b, \qquad b_2 = -b + \frac{\Omega}{2}, \qquad b_3 = -b + \frac{\Omega'}{2}, \qquad b_4 = -b + \frac{\Omega + \Omega'}{2},$$

$$c_1 = -c + \frac{\Omega'}{2}, \qquad c_2 = -c + \frac{\Omega + \Omega'}{2}, \qquad c_3 = -c, \qquad c_4 = -c + \frac{\Omega}{2},$$

avec la condition

(13) $$a + b + c = 0.$$

On déduit de là que les quatre droites d'arguments a_1, a_2, a_3, a_4 touchent leur enveloppe en quatre points situés sur une nouvelle tangente à l'enveloppe, et d'argument $2a$; de même pour les deux autres systèmes de quatre droites. De plus, d'après (13), les trois tangentes d'arguments $2a$, $2b$, $2c$ sont concourantes. Ainsi :

Les trois systèmes de quatre droites qui passent par les seize points d'un groupe jouissent de la propriété suivante.

Soit C la courbe de troisième classe à laquelle ces droites sont toutes tangentes : les quatre points de contact avec C des quatre droites d'un même système sont sur une même tangente à cette courbe, et les trois nouvelles tangentes ainsi définies sont concourantes.

20. La configuration remarquable formée par seize points situés sur trois systèmes de quatre droites est bien connue : c'est la réciproque de la configuration dite *de Hesse* que M. Schröter, en particulier, a étudiée dans des Mémoires d'un haut intérêt et spécialement dans un Mémoire inséré au tome CVIII du *Journal de Crelle*.

Les propriétés de cette configuration permettent de retrouver, d'une manière nouvelle, les résultats que nous venons d'obtenir, et quelques-uns de ceux que nous avons établis dans notre travail du tome VI (4e série) de ce Journal.

Considérons trois systèmes de quatre droites, en relation desmique, c'est-à-dire appartenant à un même faisceau ponctuel de quartiques planes; appelons *courbe desmique* du quatrième ordre toute quartique du faisceau.

D'après M. Schröter, les douze droites des trois systèmes touchent une même courbe de troisième classe et les raisonnements du n° **19** montrent qu'on peut faire correspondre à un point du plan une configuration desmique par la construction suivante :

D'un point M du plan de la courbe de troisième classe et du sixième degré C, on mène à cette courbe les trois tangentes, dont chacune coupe encore C en quatre points; les tangentes à C en ces douze nouveaux points forment une configuration desmique, c'est-à-dire se rencontrent trois à trois en seize points m.

Si M décrit une droite, les points correspondants m décrivent une courbe d'ordre μ. Deux de ces courbes, correspondant à deux droites décrites par M, ne peuvent se couper qu'en seize points, qui sont les points m de la configuration déduite du point commun aux deux droites: on a donc $\mu^2 = 16$ et, par suite, $\mu = 4$; le lieu est une quartique.

Réciproquement, toute quartique, passant par seize points m_0 d'une configuration, c'est-à-dire toute courbe desmique, peut être engendrée de cette manière. Car soit M_0 le point du plan qui correspond aux seize points m_0 de la configuration; on peut, évidemment, mener par M_0 une droite telle que la quartique qui se déduit de cette droite ait un nouveau point commun avec la courbe desmique considérée, qu'elle coupe dès lors en dix-sept points. Les deux courbes coïncident donc et la proposition est établie.

De là résulte cette proposition :

Toute courbe desmique du quatrième ordre est desmique d'une infinité de manières;

et ce mode de génération des courbes desmiques :

Étant donnée une courbe de troisième classe et du sixième ordre C, *on lui mène, par un point* M *de son plan, trois tangentes, dont chacune coupe encore* C *en quatre points.*

Les tangentes à la courbe en ces nouveaux points forment un système desmique et se coupent, par suite, trois à trois, en seize points m : lorsque M *décrit une droite, les seize points m correspondants décrivent une courbe desmique du quatrième ordre.*

21. Ce mode de génération met en évidence une propriété fondamentale des courbes desmiques, rencontrée par nous dans notre Mémoire déjà cité. Soit, en effet, Δ la droite décrite par M : si M coïncide avec un des six points communs à Δ et à C, les tangentes issues de ce point sont d'abord la tangente T en M, comptée deux fois, et une autre tangente, coupant en outre la courbe aux points M, N, P, Q. Soient G, H, I, K les points où la tangente en M coupe encore la courbe. D'après une propriété connue des courbes de troisième classe, facile d'ailleurs à établir à l'aide des fonctions elliptiques, les tangentes à C aux points N, P, Q sont les diagonales du quadrilatère formé par les tangentes aux points G, H, I, K. Les seize points m, qui correspondent à M, étant à l'intersection des tangentes en M, N, P, Q avec les tangentes en G, H, I, K, on voit que les diagonales du quadrilatère précédent sont des bitangentes de la courbe desmique qui correspond à la droite Δ, et que leurs points de contact sont les sommets de ce quadrilatère. On trouve, pour chacun des six points de C situés sur Δ, un système analogue de bitangentes.

Donc :

Toute courbe desmique a dix-huit bitangentes remarquables, qui peuvent être groupés en six triangles jouissant de la propriété suivante : les trois bitangentes de chaque triangle sont les diagonales d'un quadrilatère complet dont les six sommets sont les points de contact de ces bitangentes.

Cette proposition montre que les courbes desmiques, et, par suite, les sections planes de la surface desmique (qui sont, d'ailleurs, comme on le voit aisément, des courbes desmiques générales) coïncident avec les quartiques que nous avons étudiées dans notre Mémoire antérieur, et dont l'équation peut être mise sous la forme

$$(14)\quad x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=4(ax+by+cz)xyz.$$

22. Arrivons maintenant à l'étude des sections de la surface desmique par ses plans tangents.

Il est clair qu'on pourrait trouver leur équation générale et leurs propriétés en partant de l'équation (14) et en exprimant qu'elle représente une courbe à un point double.

De même que la courbe (14) possède six systèmes de trois bitangentes jouissant de la propriété énoncée tout à l'heure, on verrait que la courbe à point double possède quatre de ces systèmes; les deux autres systèmes sont confondus et formés par trois bitangentes issues du point double ([1]).

Mais cette marche ne conduit pas directement aux propriétés fondamentales; il est plus simple de s'appuyer sur des propositions obtenues dans la seconde Partie de ce Mémoire et de former *a priori* l'équation des courbes à étudier.

Les courbes desmiques à point double jouissent de deux propriétés caractéristiques qui entraînent toutes les autres.

La première s'énonce ainsi :

Par le point double on peut mener six tangentes à la courbe; trois de ces tangentes ont leurs points de contact en ligne droite; il en est de même des trois autres.

Soit en effet (u, v) le point de contact d'un plan tangent à la surface desmique; par ce point nous savons mener trois bitangentes de la surface, dont les seconds points de contact ont respectivement pour arguments

$$v,\quad u;\quad -2v-u,\quad v;\quad 2v-u,\quad v.$$

Ces trois points sont en ligne droite. En effet, la droite qui joint les points $(-2v-u, v)$ et $(2v-u, v)$ coupe en outre la surface desmique, d'après les formules du n° **8**, aux deux points (v, u) et $(-3v, u)$.

Le dernier de ces deux points est précisément *le tangentiel* du point de contact (u, v) (n° **17**).

([1]) Dans le mode de génération indiqué plus haut, on obtient la courbe desmique à point double en supposant que la droite Δ passe par un des points de rebroussement de la courbe C.

Nous pouvons énoncer ainsi la proposition suivante :

Par un point A de la surface desmique, on mène les tangentes aux trois biquadratiques qui passent par ce point; chacune de ces trois droites touche la surface en un second point, et ces trois nouveaux points de contact sont sur une droite qui coupe en outre la surface au point tangentiel du point A.

Il résulte bien de là que, si l'on considère la section de la surface par le plan tangent en A, trois des tangentes issues de A ont leurs points de contact en ligne droite. Or on sait que les six points de contact des tangentes menées à une quartique par son point double sont sur une conique; on en déduit aisément que les trois autres tangentes issues de A ont aussi leurs points de contact en ligne droite.

La seconde propriété est celle-ci (¹) :

Considérons les trois tangentes menées à la courbe desmique par son point double, et qui touchent les trois biquadratiques de la surface desmique passant par ce point. Soit $T = 0$ *leur équation, le point double étant pris pour origine des coordonnées; l'équation des tangentes à la courbe en ce point s'obtiendra en égalant à zéro le hessien de la forme* T.

Cette proposition est évidente, si l'on se reporte à la théorie des courbes linéaires sur la surface et à la correspondance établie entre ces courbes et les droites d'un plan.

Aux trois systèmes de biquadratiques, $v = \alpha$; $u + v = \alpha$; $u - v = \alpha$, correspondent en effet sur le plan les systèmes de droites

$$y = \alpha; \qquad y + x\sqrt{3} = \alpha; \qquad y - x\sqrt{3} = \alpha,$$

qui forment un triangle équilatéral. Par suite, si l'on prend le hessien de la forme

$$f = y(y + x\sqrt{3})(y - x\sqrt{3}),$$

(¹) Elle est due à M. Waelsch (*loc. cit.*).

on obtiendra le premier membre de l'équation d'un cercle de rayon nul. On le vérifie d'ailleurs directement; le covariant hessien est, en effet,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 36(x^2+y^2).$$

Revenant maintenant du plan à la surface, nous voyons, puisque la propriété précédente est au fond une propriété de rapports anharmoniques, qu'on obtiendra les directions asymptotiques en un point de la surface desmique en formant l'équation des tangentes aux trois biquadratiques qui passent par ce point et en égalant à zéro le hessien de cette équation (on suppose qu'on forme les équations dans le plan tangent au point considéré, pris lui-même pour origine).

25. Les deux propriétés qu'on vient d'établir permettent de former directement l'équation des courbes desmiques à point double.

En effet, le point double étant à l'origine, nous pouvons mettre sous la forme $x^3+y^3=0$ l'équation de trois tangentes menées de ce point à la courbe; le hessien de la forme x^3+y^3 est, à un facteur près, égal à xy.

Prenons maintenant pour troisième côté, $z=0$, du triangle de référence la droite qui joint les points de contact des trois tangentes $x^3+y^3=0$; l'équation de la courbe sera de la forme

$$(x^3+y^3)(ax+by+cz)+Cz^2=0,$$

$C=0$ étant l'équation d'une conique. La courbe ayant un point double à l'origine et pour tangentes en ce point les droites $x=0$, $y=0$, on a

$$C=xy,$$

et, par suite, l'équation cherchée devient

$$(x^3+y^3)(ax+by+cz)+xyz^2=0.$$

Cette équation met en évidence une nouvelle propriété. Les droites $x=0, y=0$, qui touchent la courbe au point double, la coupent respectivement en un nouveau point; la droite qui joint les deux

points ainsi définis est

$$ax + by + cz = 0,$$

et touche la courbe en un point situé sur $z = 0$.

De plus, les tangentes issues du point double, autres que les droites $x^3 + y^3 = 0$, ont pour équation

$$c^2(x^3 + y^3) - 4xy(ax + by) = 0.$$

La droite qui joint leurs points de contact s'obtient aisément.

On peut écrire l'équation de la courbe sous la forme

$$[c^2(x^3 + y^3) - 4xy(ax + by)](ax + by + cz) + 4xy\left(ax + by + \frac{c}{2}z\right)^2 = 0.$$

La droite cherchée a donc pour équation

$$ax + by + \frac{c}{2}z = 0;$$

elle passe par le point commun à $z = 0$ et $ax + by + cz = 0$.

Donc :

Par le point double d'une courbe desmique on peut mener à cette courbe six tangentes; trois de ces tangentes ont leurs points de contact sur une droite D, *les trois autres ont leurs points de contact sur une droite* D'; *les droites* D *et* D' *se coupent en un point situé sur la courbe. La tangente en ce point rencontre la courbe en deux nouveaux points, qui sont situés chacun sur une des tangentes au point double.*

Relativement à la surface desmique, on peut dire que :

Les tangentes asymptotiques en un point A *de la surface desmique coupent chacune la surface en un nouveau point; la droite qui joint ces points passe par le point tangentiel de* A *et y touche la surface.*

Il est aisé de vérifier, sur l'équation de la courbe desmique, le théorème suivant :

Toute droite issue du point double de la courbe desmique coupe cette courbe en deux nouveaux points; ces points sont conjugués harmoniques des deux points où la droite rencontre les droites fixes D *et* D' *du théorème précédent.*

24. Nous venons de trouver deux nouvelles propriétés du point que nous avons rencontré dans une autre théorie et que nous avons nommé *tangentiel* pour des raisons qu'on comprend maintenant. Le tangentiel $(-3v, u)$ d'un point (u, v) est dans le plan tangent à la surface au point (u, v), et sur la droite qui joint les points d'intersection avec la surface des tangentes asymptotiques en ce point.

Inversement, étant donné le tangentiel $(-3v_0, u_0)$, il correspond à ce point neuf points, dont les arguments sont compris dans la formule

$$u_0, \quad v_0 + \frac{4h\omega + 4h'\omega'}{3} \qquad (h, h' = 0, 1, 2).$$

Cette formule donne lieu aux remarques suivantes.

Les neuf points sont sur la courbe $u = u_0$; ils sont aussi sur les courbes

$$3v + u = 3v_0 + u_0; \qquad 3v - u = 3v_0 - u_0;$$

ces courbes sont les courbes de contact de la surface avec les développables qui ont respectivement pour arêtes de rebroussement les biquadratiques (n° **10**)

$$v = u_0, \qquad u + v = -3v_0 + u_0, \qquad u - v = -(3v_0 + u_0),$$

biquadratiques qui passent par le point $u = -3v_0$, $v = u_0$.

De là résulte cette proposition :

Soit B *un point de la surface desmique; les développables qui ont pour arêtes de rebroussement les trois biquadratiques passant par* B *touchent la surface desmique suivant trois courbes qui ont neuf points communs; le point* B *est le tangentiel de chacun de ces neuf points.*

On peut présenter autrement ces résultats.

Les trois biquadratiques passant par un point B de la surface sont sur un même cône du troisième ordre du sommet B, car les cordes de toutes les biquadratiques font partie d'un même complexe du troisième ordre. Les plans osculateurs menés par B à une des biquadratiques passant par ce point sont les plans tangents d'inflexion du cône; ils sont donc osculateurs aux deux autres biquadratiques, et les trois points d'osculation d'un même plan sont sur une génératrice d'inflexion du cône. De plus, nous savons que le plan osculateur en un point (u_0, v_0) à la biquadratique $v = v_0$, qui passe par ce point, touche la surface desmique au point (v_0, u_0) (**10**). Or par le point $(-3v_0, u_0)$ menons un plan osculateur à la biquadratique $v = u_0$ qui psase par ce point; le point d'osculation aura son argument v égal à u_0; son argument u sera tel que $3u \dotplus 3v_0$ soit égal à une période. Ce point sera donc

$$v_0 + \frac{4h\omega + 4h'\omega'}{3}, \quad u_0,$$

et, d'après ce qui vient d'être rappelé, il touchera la surface au point

$$u_0, \quad v_0 + \frac{4h\omega + 4h'\omega'}{3},$$

c'est-à-dire en un point qui a pour tangentiel $(-3v_0, u_0)$.

Donc :

Les trois biquadratiques menées par un même point B *de la surface desmique ont neuf plans osculateurs communs passant par* B ; *les trois points d'osculation de chacun de ces plans sont en ligne droite entre eux et avec le point* B; *les neuf droites ainsi définies sont les génératrices d'inflexion d'un cône du troisième ordre.*

Les neuf plans osculateurs communs touchent la surface desmique en neuf points, de chacun desquels le point B *est le tangentiel.*

QUATRIÈME PARTIE.

25. Une génération et des propriétés intéressantes de la surface desmique résultent d'un beau théorème de M. Cremona.

Ce géomètre, dans son Mémoire couronné sur les surfaces du troisième ordre, s'est proposé le problème suivant :

Soit un plan coupant une surface S, *d'ordre trois, suivant trois droites,* a_1, b_2, c_{12}; *trois coniques de la surface dont les plans passent respectivement par* a_1, b_2, c_{12} *sont toujours sur une quadrique : chercher le lieu des sommets de celles de ces quadriques qui dégénèrent en cônes.*

M. Cremona a démontré que le lieu est une surface du quatrième ordre, admettant trois séries de quadriques inscrites; par chaque point de l'espace passent deux quadriques de chaque série.

Les quadriques d'une série ont donc, d'après ces résultats, une équation de la forme

$$\lambda^2 A + 2\lambda B + C = 0,$$

et la surface enveloppe, $B^2 - AC = 0$, a pour points doubles les huit points communs aux surfaces $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

Or il est aisé de reconnaître, en lisant le Mémoire de M. Cremona, que la surface admet ainsi douze points doubles, qui sont les points de contact avec la surface cubique des plans tangents (autres que le plan $a_1 b_2 c_{12}$) qu'on peut lui mener par les droites a_1, b_2, c_{12}.

Ces résultats qui, nous le répétons, se déduisent sans aucun effort du travail de M. Cremona, peuvent être établis très simplement par le calcul.

Soient, en effet, $t = 0$ le plan $a_1 b_2 c_{12}$ et, dans ce plan, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, les équations des trois droites a_1, b_2, c_{12}.

La surface cubique qui passe par ces droites a une équation de la forme

$$ft + xyz = 0,$$

f étant du second ordre en x, y, z, t.

Trois coniques de la surface dont les plans passent respectivement par a_1, b_2, c_{12} ont pour équations

$$f + \alpha yz = 0, \qquad x = \alpha t,$$
$$f + \beta zx = 0, \qquad y = \beta t,$$
$$f + \gamma yx = 0, \qquad z = \gamma t.$$

La quadrique qui passe par ces coniques est

$$f + \alpha yz + \beta zx + \gamma yx - \alpha\beta zt - \alpha\gamma yt - \beta\gamma xt + \alpha\beta\gamma t^2 = 0.$$

Le lieu des sommets des cônes compris dans cette formule s'obtient en éliminant α, β, γ entre les équations

$$f'_x + \beta z + \gamma y - \beta\gamma t = 0,$$
$$f'_y + \alpha z + \gamma x - \alpha\gamma t = 0,$$
$$f'_z + \beta x + \alpha y - \alpha\beta t = 0,$$
$$f'_t - \alpha\beta z - \alpha\gamma y - \beta\gamma x + 2\alpha\beta\gamma t = 0.$$

Effectuant les calculs, on trouve le lieu du quatrième ordre

$$f^2 - f'_y f'_z yz - f'_x f'_z xz - f'_x f'_y xy - t f'_x f'_y f'_z + xyz f'_t = 0.$$

Soit Σ le premier membre de cette équation; posons

$$S = ft + xyz,$$

$S = 0$ étant l'équation de la surface cubique; on a identiquement

$$S^2 - S'_x S'_y S'_z = \Sigma t^2.$$

Cette identité montre bien que la surface $\Sigma = 0$ admet comme points doubles les points de contact des plans tangents menés à $S = 0$ par les droites $t = 0$, $x = 0$; $t = 0$, $y = 0$; $t = 0$, $z = 0$, pourvu toutefois que ces points ne soient pas dans le plan $t = 0$.

Or, par une droite d'une surface cubique, passent cinq plans tritangents de cette surface; les trois droites considérées étant dans un

même plan tritangent, $t = 0$, on pourra mener par chacune d'elles quatre plans tritangents autres que $t = 0$, et, par suite, la surface du quatrième degré $\Sigma = 0$ aura douze points doubles.

26. Nous allons prouver maintenant que Σ est une surface desmique; il suffit, pour cela, de vérifier que les douze points doubles forment un système desmique, c'est-à-dire sont situés trois à trois sur seize droites par lesquelles on peut mener trois systèmes de quatre plans.

Or cette propriété résulte aisément des relations entre les vingt-sept droites d'une surface cubique.

Considérons ces vingt-sept droites et employons, pour les désigner, les notations de M. Cremona, à savoir :

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,$$
$$c_{12},\ c_{13},\ c_{14},\ c_{15},\ c_{16},\ c_{23},\ c_{24},\ c_{25},\ c_{26},\ c_{34},\ c_{35},\ c_{36},\ c_{45},\ c_{46},\ c_{56}.$$

On sait qu'une droite a_i et une droite b_k se rencontrent, si i est différent de k; qu'une droite c_{ik} rencontre les droites a_i et b_k; enfin que deux droites c_{ik} et c_{lm} se rencontrent si les indices i, k, l, m sont différents. Il est aisé, d'après cela, de trouver les points de contact des plans tritangents menés par les droites a_1, b_2, c_{12}, et les relations de position entre ces points.

Nous désignerons, dans ce qui suit, par les symboles de deux droites, le point d'intersection de ces droites; ainsi $(b_3 c_{13})$ sera le point d'intersection de b_3 et de c_{13}.

Les points de contact des plans tritangents menés par a_1, b_2, c_{12} et non situés dans le plan $a_1 b_2 c_{12}$ sont :

Plans tritangents par a_1...	$(b_3 c_{13})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_5 c_{15})$	$(b_6 c_{16})$
» b_2...	$(a_3 c_{23})$	$(a_4 c_{24})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_6 c_{26})$
» c_{12}...	$(a_2 b_1)$	$(c_{34} c_{56})$	$(c_{35} c_{46})$	$(c_{36} c_{45})$

Cela posé, considérons deux plans tritangents, par exemple $a_2 b_3 c_{23}$ et $a_3 b_1 c_{13}$: ils se coupent suivant une droite. Or la droite a_2 du premier rencontre la droite b_1 du second; de même, b_3 rencontre c_{13} et

a_3 rencontre c_{23}; il en résulte que les trois points

$$(a_2 b_1),\quad (a_3 c_{23})\quad (b_3 c_{13})$$

sont en ligne droite. En considérant successivement d'autres couples de plans tritangents, on arrive à former le Tableau suivant, où les trois points de chaque colonne sont sur une même droite.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$(a_2 b_1)$	$(a_2 b_1)$	$(a_2 b_1)$	$(a_2 b_1)$	$(a_3 c_{23})$	$(a_3 c_{23})$	$(a_3 c_{23})$	$(a_4 c_{24})$
$(a_3 c_{23})$	$(a_4 c_{24})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_6 c_{26})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_5 c_{15})$	$(b_6 c_{16})$	$(b_3 c_{13})$
$(b_3 c_{13})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_5 c_{15})$	$(b_6 c_{16})$	$(c_{34} c_{56})$	$(c_{35} c_{46})$	$(c_{36} c_{45})$	$(c_{34} c_{56})$

9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
$(a_4 c_{24})$	$(a_4 c_{24})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_6 c_{26})$	$(a_6 c_{26})$	$(a_6 c_{26})$
$(b_5 c_{15})$	$(b_6 c_{16})$	$(b_3 c_{13})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_6 c_{16})$	$(b_3 c_{13})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_5 c_{15})$
$(c_{45} c_{36})$	$(c_{46} c_{35})$	$(c_{35} c_{46})$	$(c_{45} c_{36})$	$(c_{56} c_{34})$	$(c_{36} c_{45})$	$(c_{46} c_{35})$	$(c_{56} c_{34})$

Il résulte de l'examen de ce Tableau que les douze points doubles considérés sont trois à trois sur seize droites; ces seize droites sont dès lors situées sur la surface Σ.

Montrons maintenant que les seize droites appartiennent à trois systèmes de quatre plans; à cet effet, numérotons-les de 1 à 16, en suivant l'ordre des colonnes du Tableau précédent.

Il résulte de l'examen de ce Tableau que les droites 1, 2, 5, 8 sont dans un même plan, car 1 et 2 se coupent au point $(a_2 b_1)$; 1 et 5 au point $(a_3 c_{23})$; 1 et 8 au point $(b_3 c_{13})$, et ainsi de suite. On forme ainsi le Tableau suivant où les quatre droites d'une même ligne sont dans un plan, ainsi que les quatre droites d'une même colonne.

1	2	5	8
3	4	13	16
6	10	7	9
11	15	12	14

Enfin les droites 1, 4, 7, 14 sont dans un même plan, et, de même, les droites 11, 10, 13, 8; les droites 3, 2, 12, 9 et les droites 5, 16, 6, 15.

Les seize droites appartiennent donc à trois systèmes de quatre plans, et, par suite, Σ est une surface desmique du quatrième ordre.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant données, sur une surface cubique, trois droites situées dans un même plan tritangent, P, *le lieu des sommets des cônes du second ordre qui coupent la surface cubique suivant trois coniques dont les plans passent respectivement par les trois droites données est une surface desmique du quatrième ordre. Les douze points doubles de cette surface sont les points de contact, non situés dans le plan* P, *des plans tritangents qu'on peut mener à la surface cubique par les trois droites primitivement considérées.*

27. L'identité

$$S^2 - S'_x S'_y S'_z = \Sigma t^2$$

montre que la surface $\Sigma t^2 = 0$ coupe $S = 0$ suivant trois courbes distinctes.

L'une d'elles est

$$S = 0, \qquad S'_x = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} f\,t + xyz = 0, \\ f'_x t + yz = 0. \end{cases}$$

Cette courbe comprend d'abord les deux droites $t = 0$, $y = 0$ et $t = 0$ et $z = 0$, qui ne sont pas situées sur Σ, mais sur $t^2 = 0$; il reste la courbe

$$f'_x t + yz = 0,$$
$$f - xf'_x = 0,$$

qui est une biquadratique.

Les surfaces $S = 0$ et Σ se coupent donc suivant trois biquadratiques; il est aisé de voir qu'elles appartiennent sur Σ à trois systèmes différents.

Inversement, on démontre sans difficulté que :

Sur une surface desmique, trois biquadratiques quelconques de

systèmes différents appartiennent à une même surface cubique, sur laquelle les points doubles de la surface desmique sont les points de contact de plans tritangents.

On pourrait indiquer d'autres relations entre la surface desmique et les surfaces cubiques menées par trois biquadratiques; nous n'insisterons pas davantage sur cette théorie, dont le principal intérêt est dans le complément qu'elle apporte à un beau résultat de M. Cremona.

28. Nous avons défini analytiquement la surface desmique par les relations

$$\rho x = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_1 v}, \qquad \rho y = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_2 v}, \qquad \rho z = \frac{\sigma_3 u}{\sigma_3 v}, \qquad \rho t = \frac{\sigma u}{\sigma v},$$

étant posés

$$\left[\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right]^2 = \mathrm{p} u - e_1$$

et

$$\mathrm{p}'^2 u = 4(\mathrm{p} u - e_1)(\mathrm{p} u - e_2)(\mathrm{p} u - e_3).$$

Cherchons ce que devient la surface quand les fonctions elliptiques se ramènent aux fonctions circulaires, en faisant, par exemple, $e_1 = e_2$.

On sait que les fonctions $\sqrt{\mathrm{p} u - e_1}$, $\sqrt{\mathrm{p} u - e_2}$, $\sqrt{\mathrm{p} u - e_3}$ sont égales, à un facteur constant près, à $\operatorname{sn} U$, $\operatorname{cn} U$, $\operatorname{dn} U$; U étant égal à u, multiplié par une constante, et le module k de $\operatorname{sn} U$ étant $\sqrt{\dfrac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}}$.

Il résulte de là qu'en désignant par ξ, η, ζ de nouvelles coordonnées, proportionnelles à $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, la surface desmique peut être définie par les relations

$$\xi = \frac{\operatorname{sn} U}{\operatorname{sn} V}, \qquad \eta = \frac{\operatorname{cn} U}{\operatorname{cn} V}, \qquad \zeta = \frac{\operatorname{dn} U}{\operatorname{dn} V}.$$

Faisons tendre e_2 vers e_1, c'est-à-dire le module k vers zéro. Les fonctions $\operatorname{sn} U$ et $\operatorname{cn} U$ deviennent $\sin U$ et $\cos U$; $\operatorname{dn} U$ tend vers 1. On aurait alors $\zeta = 1$. Pour échapper à cette conclusion, qui ne donne rien d'intéressant, on peut, à la place de ζ, introduire la coordonnée

$$\zeta' = 2\,\frac{\zeta - 1}{k^2};$$

à la limite on a, pour $k = 0$,

$$\zeta' = \lim\left[\sqrt{\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 U}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 V}} - 1\right]\frac{2}{k^2} = (\operatorname{sn}^2 V - \operatorname{sn}^2 U),$$

c'est-à-dire

$$\zeta' = (\sin^2 V - \sin^2 U) = \sin(U + V)\sin(V - U).$$

La surface nouvelle est donc définie par

$$\xi = \frac{\sin U}{\sin V}, \qquad \eta = \frac{\cos U}{\cos V}, \qquad \zeta' = \sin(U + V)\sin(V - U),$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$\begin{aligned} \rho x &= \sin U \cos V, \\ \rho y &= \cos U \sin V, \\ \rho z &= \sin(V + U)\sin(V - U)\sin V \cos V, \\ \rho t &= \sin V \cos V. \end{aligned}$$

Posant

$$x + y = X, \qquad y - x = Y, \qquad 2z = -T, \qquad 2t = +Z,$$

et introduisant à la place de U et V les quantités α, β, γ, définies par

$$\alpha = U + V, \qquad \beta = V - U, \qquad \gamma = -2V,$$

ce qui entraîne la condition $\alpha + \beta + \gamma = 0$, il vient enfin pour expression des coordonnées d'un point de la surface

$$\left.\begin{aligned} \rho X &= \sin\alpha, \\ \rho Y &= \sin\beta, \\ \rho Z &= \sin\gamma, \\ \rho T &= \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \end{aligned}\right\} \text{ avec la condition } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

L'équation cartésienne de cette surface s'obtient aisément : on a, en

effet, entre les sinus des trois angles α, β, γ, en vertu de la relation $\alpha+\beta+\gamma=0$, la condition

$$\sin^4\alpha+\sin^4\beta+\sin^4\gamma-2\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\gamma \\ -2\sin^2\beta\sin^2\gamma+4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma=0.$$

Par suite, la surface a pour équation

$$X^4+Y^4+Z^4-2X^2Y^2-2X^2Z^2-2Y^2Z^2+4TXYZ=0.$$

Elle jouit de propriétés analogues à celles de la surface desmique générale : on voit, en particulier, que ses sections par un plan quelconque sont des courbes du type déjà rencontré (**14**).

Cette surface mériterait une étude spéciale à laquelle nous aurons occasion de revenir.

Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide.

PAR M. H. WILLOTTE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

1. *Objets des présentes études.* — Les forces instantanées, dites de *percussion*, peuvent être considérées comme représentant ce que deviennent, dans l'hypothèse limite d'une vitesse d'accroissement infinie les forces répulsives de la nature qui, naissant à petite distance de leurs centres d'action, grandissent avec une rapidité considérable à mesure que les points sur lesquels elles agissent se rapprochent de ces centres, puis décroissent avec une rapidité également considérable quand les mêmes points s'éloignent des mêmes centres.

A ce point de vue, on conçoit que l'emploi des forces de percussion est propre à donner des facilités toutes spéciales pour l'étude des phénomènes de relation entre les fluides et les solides qui y sont immergés, phénomènes connus sous le nom de *résistance des fluides*. Les phénomènes dont il s'agit sont en effet caractérisés par l'apparition entre les corps en présence d'un nombre immensément grand de forces répulsives agissant pendant un temps excessivement court.

Nous nous proposons, dans la série d'études que nous commençons ici, de montrer le parti que l'on peut tirer de la notion des forces de percussion ainsi envisagées pour faire la théorie de la résistance des fluides dans des cas particuliers qui nous conduiront à l'explication d'importantes lois naturelles.

Le fluide que nous étudierons sera constitué comme celui dont la considération s'est introduite depuis longtemps déjà dans l'enseignement classique sous le nom d'*éther* et y tient maintenant une si grande place; ce sera donc un ensemble indéfini de points matériels m qui pourront être liés entre eux par des forces dépendant d'un potentiel. Nous prendrons ce fluide en un état de *division infinie;* nous entendons par là que nous regarderons le nombre N de points m contenus dans l'unité de volume du fluide comme croissant au delà de toute limite, la valeur m des masses de ces points décroissant en même temps de manière que la masse totale Nm de l'unité de volume du fluide conserve une valeur finie déterminée, d'ailleurs quelconque.

Enfin les solides que nous considérerons seront toujours des solides *invariables;* une conséquence de la condition ainsi posée sera que ces solides devront toujours être regardés comme étant parfaitement élastiques, tout solide invariable pouvant en effet être assimilé à ce que devient à la limite un solide parfaitement élastique, dans lequel, les coefficients d'élasticité croissant indéfiniment, les déformations produites par un choc quelconque sont infiniment petites.

Nous avons surtout en vue d'examiner le cas où les solides envisagés sont en état de *moyen mouvement permanent*. Voici comment l'on est conduit à la conception de cet état : prenons un solide M complètement immergé dans un fluide; admettons d'abord que le solide soit en état de repos; il ne pourra y rester; car, les particules m du fluide étant en mouvement vibratoire, les actions de ces particules sur le solide changent à tout instant et, par suite, le solide, étant soumis à des forces qui ne se font pas constamment équilibre, se mettra nécessairement en mouvement. Mais les vitesses du solide ne croîtront pas non plus au delà de toute limite, puisque la résistance du fluide vient les diminuer dès qu'elles dépassent certaines valeurs. Il existe, par conséquent, pour le solide M, entre l'état de repos et l'état de grande agitation, un certain état intermédiaire caractérisé par ce fait que la valeur moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T v^2\,dt$ du carré de la vitesse de l'une quelconque de ses parties, calculée pour une période de temps T comptée, à partir d'une origine quelconque, tend pour $T = \infty$ vers une limite bien déterminée. C'est de cet état, comparable à celui d'une feuille d'arbre

placée au sein de l'atmosphère terrestre, que nous nous proposons de dégager ici les lois.

II. *Rappel des formules générales du choc.* — Nous commencerons par rappeler les formules du choc de deux solides pris dans le cas le plus général, formules qui conduisent, on le sait, à l'évaluation des forces de percussion.

Considérons un solide invariable quelconque, de masse M, que nous appellerons le solide M et dont nous rapporterons tous les points à ses trois axes principaux Gx, Gy, Gz passant par son centre de gravité G.

Soient, par rapport aux trois axes ainsi définis :

A, B, C les trois moments d'inertie principaux du solide ;

u_0, v_0, w_0, n_0, p_0, q_0 les composantes de la vitesse du centre de gravité de ce solide et ses rotations instantanées autour des axes de coordonnées à un certain moment, choisi de manière à précéder immédiatement un choc produit par la rencontre dudit solide M avec un autre solide quelconque que nous nommerons le solide M' ;

u, v, w, n, p, q les mêmes quantités immédiatement après le choc ;

a, b, c les coordonnées de l'élément choqué de la surface limitative du solide M ;

ϖ l'impulsion totale pendant la durée très courte du choc de la percussion résultant de ce choc ;

α, β, γ les angles que la normale *extérieure* à la surface du solide en l'élément choqué fait avec les axes de coordonnées.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$b\cos\gamma - c\cos\beta = h,$$
$$c\cos\alpha - a\cos\gamma = i,$$
$$a\cos\beta - b\cos\alpha = j.$$

Nous aurons dans ces conditions les relations bien connues

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} M(u - u_0) &= \varpi\cos\alpha,\\ M(v - v_0) &= \varpi\cos\beta,\\ M(w - w_0) &= \varpi\cos\gamma,\end{aligned}\right.$$

$$(2) \qquad \begin{cases} A(n - n_0) = h\varpi, \\ B(p - p_0) = i\varpi, \\ C(q - q_0) = j\varpi. \end{cases}$$

Si maintenant, rapportant également à ses trois axes principaux passant par son centre de gravité le solide M′ dont la rencontre avec le solide M détermine la production de la percussion ϖ, nous désignons par des lettres accentuées les quantités correspondant, pour ce solide M′, à celles ci-dessus définies pour le solide M (avec cette seule différence que les lettres α', β', γ' s'appliqueront aux angles que la normale *intérieure* en l'élément choqué du solide M′ fait avec les axes de coordonnées relatifs à ce solide), nous aurons les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} M'(u' - u'_0) = -\varpi\cos\alpha', \\ M'(v' - v'_0) = -\varpi\cos\beta', \\ M'(w' - w'_0) = -\varpi\cos\gamma', \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} A'(n' - n'_0) = -h'\varpi, \\ B'(p' - p'_0) = -i'\varpi, \\ C'(q' - p'_0) = -j'\varpi. \end{cases}$$

la percussion qui agit sur le solide M′ étant, d'après le principe de l'égalité entre l'action et la réaction, égale et de sens opposé à la percussion ϖ actionnant le solide M.

Par ailleurs, les deux solides M et M′ étant des solides invariables et pouvant par suite, d'après ce qui a déjà été remarqué page 400 ci-dessus, être assimilés à des solides parfaitement élastiques, nous ajouterons aux douze équations précédentes l'équation bien connue exprimant que, dans le choc des corps parfaitement élastiques, le total des forces vives après le choc est égal à ce qu'il était avant le choc

$$(5) \qquad \begin{cases} M(u^2 + v^2 + w^2) + An^2 + Bp^2 + Cq^2 \\ \qquad + M'(u'^2 + v'^2 + w'^2) + A'n'^2 + B'p'^2 + C'q'^2 \\ \quad = M(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + An_0^2 + Bp_0^2 + Cq_0^2 \\ \qquad + M'(u_0'^2 + v_0'^2 + w_0'^2) + A'n_0'^2 + B'p_0'^2 + C'q_0'^2. \end{cases}$$

On peut écrire cette équation comme il suit

$$\begin{aligned}
&M(u - u_0)(u + u_0) + M(v - v_0)(v + v_0) + M(w - w_0)(w + w_0)\\
&+ A(n - n_0)(n + n_0) + B(p - p_0)(p + p_0) + C(q - q_0)(q + q_0)\\
&+ M'(u' - u'_0)(u' + u'_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ A'(n' - n'_0)(n' + n'_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte des relations (1), (2), (3), (4),

$$\begin{aligned}
&u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma + u_0\cos\alpha + v_0\cos\beta + w_0\cos\gamma\\
&\quad + hn + ip + jq + hn_0 + ip_0 + jq_0\\
&\quad = u'\cos\alpha' + v'\cos\beta' + w'\cos\gamma'\\
&\quad + u'_0\cos\alpha' + v'_0\cos\beta' + w'_0\cos\gamma'\\
&\quad + h'n' + i'p' + j'q' + h'n'_0 + i'p'_0 + j'q'_0.
\end{aligned}$$

Or la somme $u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$, c'est la composante, suivant la normale en l'élément choqué de la surface du solide M, de la vitesse après le choc du centre de gravité de ce solide. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = U,$$

et de même

$$\begin{aligned}
&u_0\cos\alpha + v_0\cos\beta + w_0\cos\gamma = U_0,\\
&u'\cos\alpha' + v'\cos\beta' + w'\cos\gamma' = U',\\
&u'_0\cos\alpha' + v'_0\cos\beta' + w'_0\cos\gamma' = U'_0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs la somme $hn + ip + jq$, c'est pour le solide M la composante après le choc, suivant la même normale en l'élément choqué, de la vitesse de rotation (par rapport à l'axe instantané de rotation passant par le centre de gravité du solide) de l'élément choqué dudit solide M.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$hn + ip + jq = N.$$

et de même

$$h n_0 + i p_0 + j q_0 = V_0,$$
$$h' n' + i' p' + j' q' = V',$$
$$h' n'_0 + i' p'_0 + j' q'_0 = V'_0.$$

En tenant compte de ces notations et des transformations faites ci-dessus, l'équation (5) s'écrit

$$(6) \qquad U + U_0 + V + V_0 = U' + U'_0 + V' + V'_0;$$

les composantes de vitesses qui figurent dans le premier membre de cette équation (6) sont comptées suivant la normale *extérieure* en l'élément choqué du solide M, celles du second membre sont mesurées suivant la normale *intérieure* en l'élément choqué du solide M', en sorte que, en définitive, toutes ces composantes sont comptées en prenant une même direction pour sens positif sur la normale commune aux deux solides M et M' au point où ces solides se touchent au moment du choc.

Si maintenant, multipliant la première des équations (1), page 401 ci-dessus, par $\cos\alpha$, la seconde par $\cos\beta$, la troisième par $\cos\gamma$, nous ajoutons membres à membres les trois équations ainsi préparées, nous arrivons à la relation

$$(7) \qquad M(U - U_0) = \varpi \qquad \text{ou} \qquad U - U_0 = \frac{\varpi}{M},$$

et, en traitant de même les équations (3), page 402, nous obtenons

$$(8) \qquad U' - U'_0 = - \frac{\varpi'}{M'}.$$

Considérons maintenant les équations (2), page 402. Nous pouvons les écrire

$$n - n_0 = \frac{h\varpi}{A}, \qquad p - p_0 = \frac{i\varpi}{B}, \qquad q - q_0 = \frac{j\varpi}{C},$$

et si ensuite, multipliant la première par h, la deuxième par i, la troisième par j, nous les ajoutons membres à membres, nous parvenons

à la relation

$$(9) \qquad V - V_0 = \frac{\varpi}{\mathfrak{M}},$$

en posant

$$\frac{h^2}{A} + \frac{i^2}{B} + \frac{j^2}{C} = \frac{1}{\mathfrak{M}}.$$

De même, en posant

$$\frac{h'^2}{A'} + \frac{i'^2}{B'} + \frac{j'^2}{C'} = \frac{1}{\mathfrak{M}'},$$

nous déduisons de la considération des équations (4), page 402,

$$(10) \qquad V' - V'_0 = -\frac{\varpi}{\mathfrak{M}'}.$$

Or l'équation (6), page 404, peut s'écrire

$$U - U_0 + V - V_0 + U'_0 - U' + V'_0 - V' = 2(U'_0 + V'_0 - U_0 - V_0).$$

On en conclut, en tenant compte des relations (7), (8), (9), (10),

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} U - U_0 &= \frac{2(U'_0 + V'_0 - U_0 - V_0)}{M\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{M'} + \frac{1}{\mathfrak{M}'}\right)}, \\ V - V_0 &= \frac{2(U'_0 + V'_0 - U_0 - V_0)}{\mathfrak{M}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{M'} + \frac{1}{\mathfrak{M}'}\right)}, \\ U' - U'_0 &= \frac{2(U_0 + V_0 - U'_0 - V'_0)}{M'\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{M'} + \frac{1}{\mathfrak{M}'}\right)}, \\ V' - V'_0 &= \frac{2(U_0 + V_0 - U'_0 - V'_0)}{\mathfrak{M}'\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{M'} + \frac{1}{\mathfrak{M}'}\right)}, \end{aligned} \right.$$

$$\varpi = \frac{2(U'_0 + V'_0 - U_0 - V_0)}{\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{M'} + \frac{1}{\mathfrak{M}'}}.$$

Ces relations constituent les formules fondamentales de la théorie des percussions.

III. *Formules donnant les variations de forces vives dans le choc.* — Dans le présent travail nous aurons surtout à nous occuper des variations de forces vives. Nous allons, en conséquence, indiquer les formules relatives à ces variations qui se déduisent des relations ci-dessus.

La première des équations (1), page 401, donne

$$u - u_0 = \frac{\varpi \cos\alpha}{M}$$

et, par suite,

$$u + u_0 = 2u_0 + \frac{\varpi \cos\alpha}{M}.$$

On déduit de là

$$M(u^2 - u_0^2) = \varpi\left(2u_0 \cos\alpha + \frac{\varpi \cos^2\alpha}{M}\right).$$

On obtient de même

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} M(v^2 - v_0^2) &= \varpi\left(2v_0 \cos\beta + \frac{\varpi \cos^2\beta}{M}\right),\\ M(w^2 - w_0^2) &= \varpi\left(2w_0 \cos\gamma + \frac{\varpi \cos^2\gamma}{M}\right),\\ A(n^2 - n_0^2) &= \varpi\left(2n_0 h + \frac{\varpi h^2}{A}\right),\\ B(p^2 - p_0^2) &= \varpi\left(2p_0 i + \frac{\varpi i^2}{B}\right),\\ C(q^2 - q_0^2) &= \varpi\left(2q_0 j + \frac{\varpi j^2}{C}\right).\end{aligned}\right.$$

Par conséquent, en appelant :

W_0 la vitesse du centre de gravité du solide M avant le choc,

I_0, ω_0 le moment d'inertie et la vitesse angulaire de rotation de ce solide par rapport à son axe instantané de rotation passant par son centre de gravité à l'instant qui précède le choc,

W, I, ω les mêmes quantités à l'instant qui suit le choc,

on conclut, par addition, membres à membres, des relations (12) ci-dessus,

$$(13)\quad MW^2 + I\omega^2 - (MW_0^2 + I_0\omega_0^2) = \varpi\left[2(U_0 + V_0) + \varpi\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right)\right].$$

IV. *Simplification des formules précédentes.* — Nous avons dit en commençant, page 400 ci-dessus, que le fluide dont nous voulons étudier l'action due aux percussions qu'il exerce sur les solides, dans l'espèce sur le solide M, était pris en un état de *division infinie*. Chacune des particules constitutives de ce fluide est, dans ces conditions, assimilée à un point matériel de masse m infiniment petite; or, comme un point matériel, étant sans dimensions, peut toujours être regardé comme la limite d'une sphère homogène infiniment petite de même masse m, nous ferons, dans les formules ci-dessus, $M' = m$ et $\frac{1}{\mathfrak{M}'} = 0$ (la quantité $\frac{1}{\mathfrak{M}'}$ étant nulle dans le cas de la sphère parce que, toutes les normales de celle-ci venant passer par son centre, les quantités h', i', j' sont nulles).

De plus, pour simplifier l'écriture, nous conviendrons de désigner par les lettres l_0, l les sommes $U_0 + V_0$, $U + V$, c'est-à-dire les composantes avant et après le choc de la vitesse totale de l'élément choqué de la surface du solide mesurées suivant la normale extérieure à cet élément.

D'autre part, nous représenterons toujours par λ la grandeur absolue mesurée à un instant quelconque de la vitesse de l'un quelconque des points m et par φ l'angle que la direction de cette vitesse fait avec la normale extérieure en un élément quelconque de la surface du solide M.

Enfin nous désignerons par le symbole $\mathcal{V}$ la variation totale

$$MW^2 + I\omega^2 - (MW_0^2 + I_0\omega_0^2)$$

de la force vive du solide M sous l'effet de la percussion produite par sa rencontre avec l'un quelconque des points m.

Avec ces notations les formules ci-dessus se présentent sous un aspect plus simple. C'est ainsi que la valeur de ϖ, donnée page 405 ci-dessus, s'écrit

$$\varpi = \frac{2(\lambda_0 \cos\varphi_0 - l_0)}{\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{m}} = \frac{2m(\lambda_0 \cos\varphi_0 - l_0)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}},$$

ou, en effaçant les indices, ce qui est sans inconvénient si l'on convient que dans toutes les relations subséquentes les vitesses mises au second membre désignent des vitesses mesurées à l'instant qui précède chacun des divers chocs considérés,

$$\varpi = \frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}. \tag{14}$$

Avec les mêmes notations et conventions, la formule (13), page 406 ci-dessus, s'écrit

$$(15)\quad \begin{cases} \mathcal{V} = \varpi\left[2l + \varpi\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right)\right] \\ \quad = \frac{4m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}\left[l + \left(\frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}\right)\frac{\lambda\cos\varphi - l}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}\right]. \end{cases}$$

V. *Propriétés fondamentales du fluide considéré dans cette première étude.* — Dans cette première étude, nous supposerons que les points m consécutifs du fluide considéré sont complètement indépendants les uns des autres et qu'il n'y a non plus aucune force à action continue s'exerçant entre le solide M et lesdits points m, de sorte que les seules forces intervenant dans le mouvement du système sont les forces de percussion qui se produisent par le fait des rencontres du solide M et des points m.

Le cas ainsi défini est purement théorique et il n'y a vraisemblablement dans la nature aucun fluide qu'on puisse assimiler à un ensemble de points matériels sans actions mutuelles. Mais ce cas n'en est pas moins utile à considérer tout d'abord à cause de sa simplicité relative qui permet de dégrossir aisément les phénomènes et d'en dégager les lois. Il restera, pour étendre ces lois au cas d'un fluide à actions internes continues, à faire un travail de généralisation qui sera l'objet d'une étude ultérieure.

Le fluide à points indépendants dont nous allons rechercher les effets jouit, lorsqu'il est à l'état libre, de deux propriétés fondamentales qui sont une conséquence de ce que la distribution des masses m constitutives du fluide et celle des vitesses de ces masses, étant uni-

quement régies par le hasard, doivent satisfaire à la loi des grands nombres :

1° Le nombre $\mathfrak{N}$ des points m animés d'une même valeur de vitesse λ contenus dans un espace (E) limité de ce fluide est d'autant plus près d'être constant à tout instant et en toute région du fluide, quelles que soient la forme et la position de l'espace (E), que cet espace et par suite le nombre $\mathfrak{N}$ sont plus grands;

2° Les vitesses des $\mathfrak{N}$ points m animés de la même valeur de vitesse λ contenus dans l'espace quelconque (E) sont d'autant plus près d'être également réparties suivant toutes les directions possibles que l'espace (E) et le nombre $\mathfrak{N}$ sont plus grands.

Cette seconde propriété s'exprime algébriquement, comme on sait, en disant que, parmi les $\mathfrak{N}$ vitesses λ contenues dans l'espace (E), le nombre de vitesses, dont la direction fait avec une droite déterminée quelconque un angle compris entre la valeur quelconque φ et la valeur infiniment voisine $\varphi + d\varphi$, est d'autant plus près d'être égal à $\frac{\mathfrak{N}\sin\varphi\, d\varphi}{2}$ que l'espace (E) et par suite le nombre $\mathfrak{N}$ sont plus grands.

Cela posé, considérons un plan (P) indéfini se transportant parallèlement à lui-même avec une vitesse constante dont nous appellerons l la composante suivant la normale à ce plan. Proposons-nous de trouver le nombre de points m du fluide qui, dans l'intervalle de temps dt, viendront rencontrer l'une des faces du plan (P) à l'intérieur d'une aire infiniment grande Ω tracée sur cette face du plan avec une vitesse λ faisant avec la normale audit plan un angle compris entre φ et $\varphi + d\varphi$. La normale, dont nous nous servons en l'espèce, est celle qui est située du même côté du plan (P) que l'aire Ω.

Prenons un point m quelconque dans le fluide, ce point étant, bien entendu, placé du même côté du plan (P) que l'aire Ω. Si l'on appelle δ la distance du point en question au plan (P) mesurée au commencement de l'instant dt, cette distance, à la fin du même instant dt, sera devenue

$$\delta + (\lambda\cos\varphi - l)\, dt,$$

λ étant, comme toujours, la vitesse du point m et φ l'angle de cette vitesse avec la normale au plan.

Pour que le point m soit situé à la fin de l'instant dt dans le plan (P), il faut qu'à la fin de cet instant sa distance au plan soit devenue nulle et que l'on ait, par conséquent,

$$\delta + (\lambda \cos\varphi - l)\,dt = 0.$$

De là résulte évidemment que tous les points m qui, étant animés de la vitesse λ faisant l'angle φ avec la normale au plan (P), se trouvent au commencement de l'instant dt à une distance du plan (P) moindre que $(l - \lambda\cos\varphi)\,dt$ et du même côté du plan que l'aire Ω viendront, pendant l'instant dt, percer la face du plan sur laquelle est tracée l'aire Ω. Par suite, pour reconnaître quels sont ceux de ces points qui viennent rencontrer le plan (P) dans l'intérieur de l'aire Ω, il suffit de considérer le cylindre droit ayant pour base l'aire Ω et une hauteur égale à $(l - \lambda\cos\varphi)\,dt$; les points qui, animés de la vitesse λ faisant l'angle φ avec la normale au plan (P), sont situés à l'intérieur de ce cylindre au commencement de l'instant dt sont les points cherchés.

Si l'on désigne par N le nombre de points m animés de la vitesse λ compris dans l'unité de volume du fluide, le nombre de ces points m enfermés au commencement de l'instant dt à l'intérieur du cylindre qui vient d'être défini et faisant avec la normale au plan un angle compris entre les valeurs infiniment voisines φ, $\varphi + d\varphi$ sera représenté par l'expression

$$N\Omega(l - \lambda\cos\varphi)\,dt \times \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2}, \tag{16}$$

avec une approximation d'autant plus grande que cette expression (qui, toutes choses égales d'ailleurs, croît proportionnellement à l'aire infinie Ω) sera elle-même plus grande.

L'expression (16) ainsi obtenue désigne un nombre; elle doit donc être positive, ce qui exige que la somme $l - \lambda\cos\varphi$ soit plus grande que zéro et, par suite, λ étant essentiellement positif, que l'angle φ soit compris entre un minimum φ_1 défini par la relation

$$\cos\varphi_1 = \frac{l}{\lambda} \tag{17}$$

et la valeur π.

Comme nous l'expliquerons, page 419 ci-après, les valeurs de λ que nous aurons à considérer seront toujours infiniment grandes par rapport aux l. Aussi, le rapport $\frac{l}{\lambda}$ étant toujours plus petit que l'unité, les valeurs de φ_1 données par la relation (17) seront toujours réelles.

VI. *Calcul du nombre relatif de rencontres éprouvées par un élément quelconque de la surface du solide.* — Considérons maintenant le solide M en état de moyen mouvement permanent au sein du fluide constitué par les points m et suivons par la pensée dans la marche indéfinie des temps un même élément quelconque $d\sigma$ de la surface limitative du solide. Ce solide étant en état de moyen mouvement permanent, il est évident que les diverses valeurs de vitesses que possédera aux divers instants successifs cet élément $d\sigma$ se reproduiront toutes indéfiniment, non pas nécessairement dans le même ordre de succession, mais de telle façon que si, dans une période de temps très longue T, on détermine ceux des instants dt pour lesquels ledit élément $d\sigma$ a une composante normale de vitesse égale à une certaine valeur quelconque l, la somme $\sum dt$ de ces instants, comprise dans T, peut être rendue aussi grande qu'on le veut, à condition de prendre T suffisamment grand, quelle que soit d'ailleurs l'origine des temps à partir de laquelle on compte T.

Or, pendant l'un quelconque des dt ainsi définis, l'élément $d\sigma$ peut, au point de vue de ses probabilités de rencontres avec les points m du fluide (celui-ci étant pour un instant considéré comme inaltéré par la présence du solide M), être assimilé à l'un quelconque des éléments de l'aire Ω de l'expression (16) ci-dessus, en sorte que la probabilité de sa rencontre pendant l'instant dt avec l'un quelconque des

$$(16) \qquad N\Omega(l - \lambda\cos\varphi_1)\,dt \times \frac{\sin\varphi_1\,d\varphi_1}{2}$$

points m compris dans cette expression est $\frac{d\sigma}{\Omega}$.

Par suite, en vertu de la loi des grands nombres, cette fraction $\frac{d\sigma}{\Omega}$ mesure la proportion relative du nombre de rencontres qu'éprouve

l'élément $d\sigma$ pendant l'intervalle de temps très long $\sum dt$ sur le nombre total

$$N\Omega(l-\lambda\cos\varphi)\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2}\times\sum dt$$

de rencontres auquel serait soumise l'aire Ω pendant ce même intervalle $\sum dt$.

Le nombre des rencontres éprouvées par l'élément $d\sigma$ peut donc être pris égal à

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &N\Omega(l-\lambda\cos\varphi)\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2}\times\frac{d\sigma}{\Omega}\times\sum dt\\ &\quad=\frac{1}{2}Nt(l-\lambda\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\times d\sigma\end{aligned}\right.$$

$\left(\text{en posant } \sum dt = t\right)$, et cela avec une approximation d'autant plus grande que l'espace de temps indéfini t est lui-même plus grand.

Toutefois, ce raisonnement suppose, ainsi que nous l'avons stipulé ci-dessus, que la constitution du fluide n'est pas altérée par la présence du solide M. Il reste donc à montrer qu'il est légitime de regarder ce fluide comme inaltéré : or ceci résulte pour la présente étude de la condition, posée page 408 ci-dessus, que les points m constitutifs du fluide ne sont soumis à aucune force d'action continue ; car alors les points m ne rencontrent le solide M chacun qu'une seule fois ; ils arrivent de l'infini, se mouvant uniformément en ligne droite chacun avec la vitesse λ qui lui est propre, rebondissent sur le solide M et repartent ensuite en s'éloignant de ce solide pour ne plus le revoir jamais. Les points m qui, marchant vers le solide M, ne l'ont pas encore rencontré sont donc exactement dans les mêmes conditions que si ce solide n'existait pas, puisque rien n'est encore venu altérer leur distribution dans l'espace, ni leurs vitesses.

Il convient d'ajouter que, pour que les considérations ici présentées soient exactes, il faut que le solide M soit convexe ; un solide concave serait, en effet, exposé à être rencontré plusieurs fois par un même point m. Il est nécessaire aussi que le solide M n'éprouve pas brusquement de grandes variations de vitesses ; autrement il pourrait rejoindre

les points m qui s'éloignent de lui et les heurter à nouveau; cette dernière condition est toujours remplie dans la présente théorie, parce que, comme il a déjà été annoncé, page 411 ci-dessus, les vitesses λ des points m doivent être infiniment grandes par rapport aux vitesses l du solide; or, comme les grandeurs des vitesses λ ne sont altérées qu'infiniment peu par les rencontres des points m et du solide M, ces vitesses restent, après ces rencontres, infiniment grandes par rapport aux vitesses du solide qui, par suite, ne peut arriver à rattraper les points m s'éloignant de lui.

VII. *Formules* : $\frac{1}{T}\sum\varphi = 0$, $\int l\,d\sigma = 0$. — Nous allons maintenant établir deux formules qui nous seront utiles ci-après.

La première est relative à l'état de moyen mouvement permanent dans lequel se trouve le solide M. Nous avons dit, page 400 ci-dessus, que cet état est caractérisé par ce fait que la valeur moyenne du carré de la vitesse de l'une quelconque des parties du solide M, et, par suite, aussi la valeur moyenne

$$\frac{1}{T}\int_0^T (MW^2 + I\omega^2)\,dt$$

de la force vive totale du solide, calculées pendant l'espace de temps T, tendent pour $T = \infty$ vers une limite finie et bien déterminée, indépendante de l'époque à partir de laquelle on commence à compter ce temps T. La formule que nous avons ici en vue sert précisément à l'évaluation de cette moyenne de la force vive totale, moyenne dont la détermination est le principal but de nos recherches.

Si l'on considère les valeurs de la force vive totale du solide M

$$(MW^2 + I\omega^2)_T, \qquad (MW^2 + I\omega^2)_0,$$

à deux époques quelconques séparées par un intervalle de temps T infiniment grand, la différence

$$(MW^2 + I\omega^2)_T - (MW^2 + I\omega^2)_0$$

de ces deux valeurs est finie, puisque chacune de ces valeurs est elle-

même évidemment une quantité finie. Le quotient

$$(18)\qquad \frac{(MW^2+I\omega)_T-(MW^2+I\omega^2)_0}{T}$$

tend par conséquent vers zéro pour $T=\infty$.

Mais, pendant l'intervalle de T, le solide M éprouve par l'effet de ses rencontres avec les points m un nombre très grand de percussions, nombre qui devient infini pour $T=\infty$; et, si l'on représente par

$$(MW^2+I\omega^2)_1,\quad (MW^2+I\omega_2)_2,\quad \ldots,\quad (MW^2+I\omega^2)_p$$

les valeurs de la force vive totale de ce solide après la première, la seconde, ..., l'avant-dernière de ses rencontres, on peut écrire identiquement

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &(MW^2+I\omega^2)_r-(MW^2+I\omega^2)_0\\ &\quad= (MW^2+I\omega_2)_r-(MW^2+I\omega^2)_p+(MW^2+I\omega^2)_p\\ &\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad-(MW^2+I\omega^2)_2+(MW^2+I\omega^2)_2-(MW^2+I\omega^2)_1\\ &\qquad+(MW^2+I\omega^2)_1-(MW^2+I\omega^2)_0,\end{aligned}\right.$$

la force vive totale du solide restant d'ailleurs constante entre deux rencontres consécutives puisque ce solide n'est soumis à aucune force autre que les percussions.

Mais les diverses différences de la forme

$$(MW^2+I\omega^2)_k-(MW^2+I\omega^2)_{k-1},$$

qui composent le second membre de l'identité (19), ne sont autre chose que les variations de force vive dues aux percussions que nous avons appelées φ, pages 407 et 408 ci-dessus. Le second membre de cette identité est donc égal à la somme $\sum\varphi$ des variations de forces vives dues aux percussions éprouvées par le solide M pendant l'intervalle de temps T. De là résulte qu'en rapprochant la relation (19) et l'expression (18) on arrive à la formule

$$(20)\qquad \frac{1}{T}\sum\varphi=0,\qquad \text{pour } T=\infty.$$

qui est la première de celles que nous voulions établir, et dont nous verrons l'emploi ci-après.

La seconde des formules que nous avons en vue est relative à une propriété générale du mouvement des solides invariables.

Pour y arriver, considérons d'abord une surface fermée quelconque se déplaçant d'une façon quelconque en se déformant ou non. Si, prenant deux positions quelconques infiniment voisines (S) et (S_1) de cette surface, on appelle s le segment de la normale à l'élément quelconque $d\sigma$ de (S) compris entre (S) et (S_1), l'intégrale

$$\int s \times d\sigma$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ de (S) représente la différence des volumes enfermés respectivement à l'intérieur des surfaces (S_1) et (S), la longueur s étant, bien entendu, prise avec le signe + ou le signe — suivant qu'elle est à l'extérieur ou à l'intérieur de (S).

On en conclut que, lorsque le volume enfermé à l'intérieur de (S) est constant, ce qui arrive notamment quand (S) est la surface limitative d'un solide invariable, l'intégrale $\int s \times d\sigma$ est nulle.

Mais, si l'on appelle l la composante de la vitesse du déplacement de l'élément quelconque $d\sigma$ de (S) mesurée suivant la normale extérieure à cet élément et dt l'intervalle de temps infiniment petit que (S) met à passer en (S_1), on a

$$s = l \times dt.$$

Par conséquent, dans le cas du mouvement d'un solide invariable, on peut écrire

$$\int l \times dt \times d\sigma = 0,$$

ou, en supprimant le facteur dt commun à tous les termes de cette intégrale, facteur qui n'est pas nul,

(21) $$\int l\,d\sigma = 0.$$

C'est la seconde des formules cherchées. Il est possible d'en déduire six autres qu'il faut aussi connaître.

On a, d'après les définitions des pages 403 et 407 ci-dessus,

$$(22)\qquad l = U + V = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma + hn + ip + jq$$

et, par suite,

$$\int l\,d\sigma = u\int\cos\alpha\,d\sigma + v\int\cos\beta\,d\sigma + w\int\cos\gamma\,d\sigma$$
$$+ n\int h\,d\sigma + p\int i\,d\sigma + q\int j\,d\sigma;$$

et, comme la relation (21) est exacte, quel que soit le mouvement imprimé au solide M, on conclut de là

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \int\cos\alpha\,d\sigma = 0, & \int\cos\beta\,d\sigma = 0, & \int\cos\gamma\,d\sigma = 0, \\ \int h\,d\sigma = 0, & \int i\,d\sigma = 0, & \int j\,d\sigma = 0. \end{array}\right.$$

VIII. *Sommation en* φ. — Prenons à présent la formule (20), page 414 ci-dessus, et cherchons à l'appliquer au mouvement du solide M en nous servant pour calculer $\sum\varphi$ de l'expression (17), page 412.

Chacune des percussions comprise dans l'expression (17) produira un φ dont la valeur est donnée par la formule (15), page 408 ci-dessus. L'ensemble de ces percussions déterminera, par suite, une somme de φ égale à

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{4m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \dfrac{m}{M} + \dfrac{m}{\mathfrak{M}}}\left[l + \left(\dfrac{m}{M} + \dfrac{m}{\mathfrak{M}}\right)\dfrac{\lambda\cos\varphi - l}{1 + \dfrac{m}{M} + \dfrac{m}{\mathfrak{M}}}\right] \\ \qquad\times\frac{1}{2}Nt(l - \lambda\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi \times d\sigma \\ \quad = -\dfrac{2m(\lambda\cos\varphi - l)^2}{1 + \dfrac{m}{\mu}}\left(l + \dfrac{m}{\mu}\,\dfrac{\lambda\cos\varphi - l}{1 + \dfrac{m}{\mu}}\right)Nt\sin\varphi\,d\varphi \times d\sigma, \end{array}\right.$$

en posant

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{\mu}.$$

Pour avoir la somme de tous les φ qu'éprouve pendant le temps T le solide M sous l'effet des percussions dues aux points m qu'il rencontre, il faut intégrer l'expression (24) ainsi formée par rapport aux $d\varphi$, aux $d\sigma$, puis ajouter ensemble les résultats obtenus correspondant à chacune des diverses valeurs possibles de λ et de l.

Occupons-nous d'abord de l'intégration en φ.

Nous avons vu, page 410 ci-dessus, que l'angle φ devait être compris entre un minimum φ_1 donné par la relation

$$(17) \qquad \cos\varphi_1 = \frac{l}{\lambda}$$

et π.

Or on a

$$\int_{\varphi_1}^{\pi} (\lambda\cos\varphi - l)^2 \sin\varphi\, d\varphi = -\left[\frac{(\lambda\cos\varphi - l)^3}{3\lambda}\right]_{\varphi_1}^{\pi} = \frac{(\lambda + l)^3}{3\lambda},$$

$$\int_{\varphi_1}^{\pi} (\lambda\cos\varphi - l)^3 \sin\varphi\, d\varphi = -\left[\frac{(\lambda\cos\varphi - l)^4}{4\lambda}\right]_{\varphi_1}^{\pi} = -\frac{(\lambda + l)^4}{4\lambda}.$$

En tenant compte de ces deux résultats, la sommation en φ donne une première somme de φ que nous représenterons par le symbole $\sum_1 \varphi$ et dont l'expression est

$$(25) \qquad \sum_1 \varphi = \frac{2m\Lambda}{1 + \frac{m}{\mu}}\left[\frac{l(\lambda + l)^3}{3\lambda} - \frac{m}{\mu}\,\frac{(\lambda + l)^4}{4\lambda\left(1 + \frac{m}{\mu}\right)}\right] t\, d\sigma.$$

IX. *Sommation en λ, en l et en $d\sigma$.* — Pour continuer, nous présenterons une remarque importante à laquelle nous avons déjà fait allusion, pages 411 et 413 ci-dessus. C'est qu'il est impossible que l'état de moyen mouvement permanent du solide M se réalise si les vitesses des différentes parties de ce solide ne sont pas infiniment petites par rapport aux vitesses λ des différents points m du fluide.

Supposons, en effet, que les vitesses l et λ soient du même ordre de grandeur. Alors les rapports $\frac{m}{M}$, $\frac{m}{\mathfrak{M}}$ étant infiniment petits, puisque, page 400 ci-dessus, les masses m sont infiniment petites, la formule (15), page 408, peut s'écrire simplement

$$(15 \textit{ bis}) \qquad \varphi = 4m(\lambda\cos\varphi - l)\,l = 4m\lambda\cos\varphi \times l - 4ml^2.$$

Admettons maintenant pour un instant que (ce qui arriverait si le solide M était immobile) le nombre de points m, qui viennent rencontrer, pendant l'espace de temps quelconque t, les divers éléments $d\sigma$ de la surface du solide avec la composante de vitesse $\lambda\cos\varphi$, soit à égalité d'aire des $d\sigma$ le même pour tous; autrement dit, prenons pour représenter ce nombre, une expression de la forme $\mathrm{H}\,t\,d\sigma$, H étant un coefficient positif dépendant de λ et de φ, mais ayant même valeur pour tous les $d\sigma$ de la surface du solide. Alors la somme $\sum\varphi$ des variations de force vive produites sur le solide par l'ensemble des chocs survenus pendant le temps t avec la composante de vitesse $\lambda\cos\varphi$ s'obtiendra en faisant l'intégration en $d\sigma$ pour toute l'étendue de la surface du solide de l'expression

$$4m\lambda\cos\varphi \times l \times \mathrm{H}\,t\,d\sigma - 4ml^2 \times \mathrm{H}\,t\,d\sigma,$$

c'est-à-dire que l'on aura

$$\sum\varphi = 4m\lambda\cos\varphi \times \mathrm{H}\,t\int l\,d\sigma - 4m\,\mathrm{H}\,t\int l^2\,d\sigma.$$

Et comme, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, formule (21), page 415, on a, à tout instant du mouvement du solide,

$$\int l\,d\sigma = 0,$$

il viendra simplement

$$(26) \qquad \sum\varphi = -4m\,\mathrm{H}\,t\int l^2\,d\sigma.$$

Par conséquent, avec les hypothèses ici faites, $\sum \psi$ serait constamment négatif.

Mais de ce que le solide M est en mouvement il résulte que les éléments $d\sigma$ pour lesquels l est positif, c'est-à-dire ceux qui progressent dans le fluide, marchent vers les points m, et que par suite les rencontres éprouvées par ces $d\sigma$ sont plus nombreuses qu'elles ne le seraient dans l'état d'immobilité du solide et au contraire que les $d\sigma$ pour lesquels l est négatif, fuyant devant les points m, sont exposés à moins de rencontres que dans l'état d'immobilité.

Par ailleurs, comme il est nécessaire, pour qu'une rencontre se produise entre un $d\sigma$ et un point m, que la composante normale de la vitesse relative du point m par rapport au $d\sigma$ tende à rapprocher ce point du $d\sigma$, autrement dit que l'expression $\lambda\cos\varphi - l$ soit négative, la relation (15 *bis*), page 418 ci-dessus, montre que ψ est négatif quand l est positif, positif quand l est négatif.

L'état de mouvement du solide M a donc pour effet d'accroître le nombre des percussions qui lui enlèvent de la force vive, de diminuer le nombre de celles qui lui en apportent, et, par suite, le $\sum \psi$ qui, donné par la formule (26) de la page précédente, est toujours négatif pour l'hypothèse de la page 418 dans laquelle est établie cette formule, serait, *a fortiori*, toujours négatif si, à ladite formule (26), on substituait une formule tenant compte du nombre exact des percussions éprouvées par chacun des divers $d\sigma$.

Par conséquent, lorsque les λ et les l sont du même ordre de grandeur, la force vive totale du solide M tend constamment à diminuer et la réalisation de l'état de moyen mouvement permanent est par suite impossible.

La conclusion serait la même si les l étaient infiniment grands par rapport aux λ.

Il faut donc que, pour rechercher les conditions de l'état de moyen mouvement permanent du solide M, on regarde les l comme étant infiniment petits par rapport aux λ.

Si alors, prenant la formule (25), page 417 ci-dessus, on en développe le second membre suivant les puissances décroissantes de λ, on ob-

tient

$$\sum_1 \varphi = \frac{2mN}{1+\frac{m}{\mu}}\left(\frac{l\lambda^2}{3} + l^2\lambda + \ldots - \frac{\frac{m}{\mu}\frac{\lambda^3}{4} + \ldots}{1+\frac{m}{\mu}}\right) t\, d\sigma,$$

en laissant de côté des termes infiniment petits par rapport à ceux que l'on écrit.

On peut encore, en négligeant devant l'unité le rapport infiniment petit $\frac{m}{\mu}$, donner au $\sum_1 \varphi$ la forme plus simple

$$(25\ bis)\qquad \sum_1 \varphi = -2mN\left(\frac{l\lambda^2}{3} + l^2\lambda - \frac{m}{\mu}\frac{\lambda^3}{4}\right) t\, d\sigma.$$

Formant maintenant l'expression (25 *bis*) pour chacune des diverses valeurs de λ existant dans le fluide et ajoutant ensemble tous les $\sum_1 \varphi$ ainsi constitués, on obtient, pour chaque élément $d\sigma$, pendant la durée t du temps pour laquelle il possède la vitesse l, une somme de variations que nous appellerons $\sum_2 \varphi$,

$$(26)\quad \sum_2 \varphi = \left(-\frac{2}{3} lt \sum Nm\lambda^2 - 2l^2 t \sum Nm\lambda + \frac{t}{2\mu} \sum Nm^2\lambda^3\right) d\sigma.$$

Écrivant alors l'expression (26) pour un même $d\sigma$ pour chacune des valeurs de l par lesquelles passe ce $d\sigma$ pendant la période de temps infiniment grande T, ajoutant ensemble tous les $\sum_2 \varphi$ ainsi formés, remarquant, par ailleurs, que, si l'on appelle $l_1, l_2, l_3, \ldots$ ces diverses valeurs de l et $t_1, t_2, t_3, \ldots$ les espaces de temps compris dans T pendant lesquels $d\sigma$ possède les différents l en question, on a

$$l_1 t_1 + l_2 t_2 + l_3 t_3 + \ldots = \int_0^T l\, dt,$$

$$l_1^2 t_1 + l_2^2 t_2 + l_3^2 t_3 + \ldots = \int_0^T l^2\, dt,$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = T;$$

on arrive, pour l'ensemble des variations de force vive dues aux percussions éprouvées par l'élément $d\sigma$ pendant le temps T, à la somme

$$(27)\qquad \sum_3 \psi = \left(-\frac{2}{3}\int_0^T l\,dt \times \sum N m\lambda^2 - 2\int_0^T l^2\,dt \times \sum N m\lambda + \frac{T}{2\mu}\sum N m^2\lambda^3 \right) d\sigma.$$

Il ne reste plus, pour trouver le total des ψ éprouvés par le solide M pendant le temps T, qu'à ajouter ensemble tous les $\sum_3 \psi$ correspondant à tous les $d\sigma$ qui composent la surface extérieure du solide M.

Avant de faire cette sommation, remarquons que l'on peut, en intervertissant l'ordre des intégrations, écrire

$$\int d\sigma \int_0^T l\,dt = \int_0^T dt \int l\,d\sigma,$$

et que, par suite, comme d'après la relation (21), page 415 ci-dessus, on a, à tout instant,

$$\int l\,d\sigma = 0,$$

le premier terme du second membre de la sommation dont il s'agit sera nul.

Tenant compte de cette observation, on arrive à l'expression

$$\sum \psi = -2\int d\sigma \int_0^T l^2\,dt \times \sum N m\lambda + \frac{ST}{2\mu_1}\sum N m^2\lambda^3,$$

S désignant la surface totale du solide M et μ_1 une constante définie par l'égalité $\int \frac{d\sigma}{\mu} = \frac{S}{\mu_1}$.

Et cette expression de $\sum \psi$, portée dans le premier membre de la relation

$$(20)\qquad \frac{1}{T}\sum \psi = 0$$

donne l'équation

$$(28) \qquad -\frac{2}{T}\int d\sigma \int_0^T l^2\,dt \times \sum \text{N} m \lambda + \frac{S}{2\mu_1} \sum \text{N} m^2 \lambda^3 = 0,$$

qui exprime une des lois du mouvement du solide M.

X. *Interprétation du résultat obtenu pour le cas où le solide* M *est une sphère homogène.* — Pour interpréter le résultat ainsi obtenu, examinons d'abord le cas simple où le solide M serait une sphère homogène.

Dans toute sphère homogène, on a, comme nous l'avons déjà remarqué, page 407 ci-dessus,

$$\frac{1}{\mathfrak{M}} = 0;$$

par suite, $\frac{1}{\mu}$ se réduit à $\frac{1}{M}$. Par ailleurs, la formule (22), page 416 ci-dessus, s'écrit simplement

$$(22\ bis) \qquad l = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma,$$

et l'on a alors

$$\int d\sigma \int_0^T l^2\,dt = \int_0^T dt \int l^2\,d\sigma = \int_0^T dt \int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2\,d\sigma$$

$$= \int_0^T dt \left\{ \begin{aligned} & u^2 \int \cos^2\alpha\,d\sigma + v^2 \int \cos^2\beta\,d\sigma \\ & + w^2 \int \cos^2\gamma\,d\sigma + 2vw \int \cos\beta\cos\gamma\,d\sigma \\ & + 2uw \int \cos\alpha\cos\gamma\,d\sigma + 2uv \int \cos\alpha\cos\beta\,d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Or on a pour la sphère

$$\int \cos^2\alpha\,d\sigma = \int \cos^2\beta\,d\sigma = \int \cos^2\gamma\,d\sigma = \frac{S}{3},$$

$$\int \cos\beta\cos\gamma\,d\sigma = \int \cos\alpha\cos\gamma\,d\sigma = \int \cos\alpha\cos\beta\,d\sigma = 0.$$

Par suite,

$$\int d\sigma \int_0^T l^2\, dt = \frac{S}{3} \int_0^T (u^2 + v^2 + w^2)\, dt = \frac{S}{3} \int_0^T W^2\, dt,$$

et dans ces conditions, l'équation (28) de la page précédente devient

$$-\frac{2S}{3T} \int_0^T W^2\, dt \times \sum N m \lambda + \frac{S}{2M} \sum N m^2 \lambda^3 = 0;$$

on en conclut la formule

$$(29) \qquad \frac{1}{T} \int_0^T M W^2\, dt = \frac{3}{4}\, \frac{\Sigma N m^2 \lambda^3}{\Sigma N m \lambda}.$$

La fraction qui compose le second membre de cette formule ne contient que des termes dépendant exclusivement de la constitution du fluide. On arrive donc à ce théorème :

La valeur moyenne de la force vive du mouvement de translation d'une sphère homogène en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide à points indépendants, infiniment divisé, est égale, quels que soient le rayon *et la* masse *de la sphère, à une quantité qui ne dépend que de la constitution du fluide.*

Quant à la force vive de rotation de la sphère, elle peut être en l'espèce quelconque; les quantités h, i, j étant nulles (p. 407 ci-dessus) pour toute sphère homogène, la vitesse de rotation de la sphère n'influe aucunement sur la grandeur des composantes normales des vitesses des divers éléments de sa surface; c'est ce qui appert clairement de la relation (22 *bis*), page 422 ci-dessus. Aussi les percussions éprouvées par la sphère ne peuvent avoir aucun effet pour modifier et régler la force vive de rotation comme elles font pour la force vive de translation.

XI. *Interprétation du résultat pour le cas où le solide* M *est quelconque.* — L'interprétation des lois du mouvement du solide se fait d'une façon moins immédiate lorsque ce solide est quelconque.

Pour y arriver il faut substituer à l'équation unique (28) de la page 422 un système de vingt et une équations basées sur les considérations suivantes :

La force vive totale $MW^2 + I\omega^2$ du solide M est liée, comme l'on sait, aux six vitesses u, v, w, n, p, q définissant à un instant quelconque le mouvement du solide par l'équation

$$MW^2 + I\omega^2 = Mu^2 + Mv^2 + Mw^2 + An^2 + Bp^2 + Cq^2.$$

Nous allons d'abord montrer que ce que nous avons dit (p. 413-414 ci-dessus) au sujet des variations φ de la force totale du solide M, s'applique aussi (avec d'autant plus d'exactitude que le fluide constitué par les points m est plus divisé) aux variations φ_u, φ_v, φ_w, φ_n, φ_p, φ_q des produits Mu^2, Mv^2, Mw^2, An^2, Bp^2, Cq^2 et que, par suite, on peut écrire les équations

$$(30)\qquad \begin{cases} \frac{1}{T}\sum \varphi_u = 0, & \frac{1}{T}\sum \varphi_v = 0, & \frac{1}{T}\sum \varphi_w = 0, \\ \frac{1}{T}\sum \varphi_n = 0, & \frac{1}{T}\sum \varphi_p = 0, & \frac{1}{T}\sum \varphi_q = 0, \end{cases}$$

analogues à l'équation (20), en négligeant des quantités dont l'importance relative est d'autant moindre que le fluide est plus divisé.

Pour justifier ces équations (30), il n'y aurait qu'à répéter le raisonnement fait (p. 413-414 ci-dessus) pour l'établissement de l'équation (20) si (comme cela arrive pour la force vive totale) les produits Mu^2, Mv^2, Mw^2, An^2, Bp^2, Cq^2 restaient constants dans l'intervalle de temps compris entre deux percussions consécutives quelconques. Mais l'on sait que cette condition n'est pas remplie, les composantes de vitesse u, v, w, n, p, q changeant à chaque instant suivant les lois du célèbre mouvement de Poinsot. Il faut donc, pour légitimer l'emploi des équations (30), des explications et peut-être des conditions spéciales, et c'est précisément dans la reconnaissance de ces conditions que nous allons voir intervenir l'emploi de la notion du fluide infiniment divisé que nous avons posée page 400 ci-dessus, comme point de départ des présentes études.

En vue d'élucider la question, formons d'abord le $\sum \varphi_u$ pendant

l'espace de temps infiniment grand T; pour cela, nous n'avons qu'à suivre une marche analogue à celle qui, dans les pages précédentes 417 à 421, nous a permis de calculer $\sum\varphi$ pendant ce même espace de temps T.

On a, d'après la première des formules (12) de la page 406 ci-dessus,

$$\varphi_u = \mathrm{M}u^2 - \mathrm{M}u_0^2 = \varpi\left(2u_0\cos\alpha + \frac{\varpi\cos^2\alpha}{\mathrm{M}}\right),$$

ou, en employant les notations définies pages 407 et 417 ci-dessus,

$$\varphi_u = \frac{4m(\lambda\cos\varphi - l)}{1+\frac{m}{\mu}}\left(u\cos\alpha + \frac{m}{\mathrm{M}}\,\frac{\lambda\cos\varphi - l}{1+\frac{m}{\mu}}\cos^2\alpha\right).$$

On en conclut, par une série de calculs semblables à ceux développés pages 416 et suivantes ci-dessus,

$$\sum_1\varphi_u = -\frac{2m\mathrm{N}}{1+\frac{m}{\mu}}\left[\frac{(\lambda+l)^3 u\cos\alpha}{3\lambda} - \frac{m}{\mathrm{M}}\,\frac{(\lambda+l)^4\cos^2\alpha}{4\lambda\left(1+\frac{m}{\mu}\right)}\right]t\,d\sigma$$

$$= -2m\mathrm{N}\left(\frac{u\cos\alpha\times\lambda^2}{3} + u\cos\alpha\, l\lambda - \frac{m}{\mathrm{M}}\,\frac{\lambda^3\cos^2\alpha}{4}\right)t\,d\sigma,$$

$$\sum_2\varphi_u = \left(-\tfrac{2}{3}\,u\cos\alpha\times t\sum\mathrm{N}m\lambda^2 - 2u\cos\alpha\times lt\sum\mathrm{N}m\lambda + \frac{t\cos^2\alpha}{2\mathrm{M}}\mathrm{N}m^3\lambda^3\right)d\sigma,$$

$$\sum_3\varphi_u = \left(-\tfrac{2}{3}\int_0^{\mathrm{T}} u\cos\alpha\,dt\times\sum\mathrm{N}m\lambda^2 - 2\int_0^{\mathrm{T}} u\cos\alpha\, l\,dt\times\sum\mathrm{N}m\lambda + \frac{\mathrm{T}\cos^2\alpha}{2\mathrm{M}}\sum\mathrm{N}m^2\lambda^3\right)d\sigma,$$

et, enfin, en remarquant que, comme il a été établi page 416 ci-dessus, on a, pour l'ensemble de la surface limitative du solide [première des formules (23)] : $\int\cos\alpha\,d\sigma = 0$,

$$(31)\qquad \sum\varphi_u = -2\int d\sigma\int_0^{\mathrm{T}} u\cos\alpha\, l\,dt\sum\mathrm{N}m\lambda + \frac{\mathrm{T}}{2\mathrm{M}}\int\cos^2\alpha\,d\sigma\sum\mathrm{N}m^2\lambda^3.$$

Or, en examinant l'expression de $\sum\varphi_u$ ainsi obtenue, on voit que

l'on peut, en laissant constamment du même ordre de grandeur, d'une part, les produits $\mathrm{N}m$ (et, par suite, la masse de l'unité de volume, autrement dit la densité du fluide), d'autre part, le rapport $\frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda}$, faire grandir au delà de toute limite les deux termes de ladite expression en attribuant aux vitesses λ des valeurs suffisamment élevées.

Mais, comme la relation (28), page 422 ci-dessus, peut s'écrire

$$\frac{\mu_1}{\mathrm{ST}} \int d\sigma \int_0^{\mathrm{T}} l^2\, dt = \frac{1}{4} \frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda},$$

les vitesses l du solide M restent constamment du même ordre de grandeur quand, le solide ne variant pas, les vitesses λ grandissent sans que l'ordre de grandeur du rapport $\frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda}$ soit altéré. D'autre part, les variations des composantes de vitesses du solide M dues au mouvement de Poinsot dans l'intervalle des chocs successifs sont, comme on sait, proportionnelles aux produits de ces composantes et par suite l'ordre de grandeur de leur somme, calculée pendant un espace de temps déterminé (dans l'espèce T), ne change pas quand, le solide ne variant pas, les vitesses l de ce solide conservent leur ordre de grandeur pendant que les vitesses λ croissent indéfiniment.

De là résulte que, lorsque, voulant appliquer aux φ_u le raisonnement des pages 413-414 ci-dessus pour arriver à écrire l'équation $\frac{1}{\mathrm{T}} \sum \varphi_u = 0$, on regarde les produits $\mathrm{M}u^2$ comme constants entre deux chocs consécutifs, on commet des erreurs dont la somme peut être réduite d'importance relativement à la somme $\sum \varphi_u$ autant qu'on le veut en attribuant aux vitesses λ du fluide des valeurs suffisantes.

Par ailleurs, pour que les produits $\mathrm{N}m$ et le rapport $\frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda}$ restent constamment du même ordre de grandeur quand les λ croissent au delà de toute limite, il faut que les produits $m\lambda^2$ demeurent eux-mêmes constamment du même ordre de grandeur et, par suite, que les masses m décroissent de plus en plus, autrement dit que la division du fluide soit poussée de plus en plus loin.

C'est donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé page 424 ci-dessus,

sur l'emploi de la considération des fluides infiniment divisés que repose la justification des équations (30) ci-dessus.

Nous pouvons maintenant nous servir des équations (30) ainsi légitimées.

Prenons l'expression (31) de la page 425, divisons-la par T et égalons-la à zéro. En tenant compte de la relation

$$(22) \qquad l = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma + hn + ip + jq,$$

nous obtiendrons l'équation

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{M} \Bigg\{ & \int \cos^2\alpha \, d\sigma \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} u^2 \, dt + \int \cos\alpha \cos\beta \, d\sigma \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} uv \, dt \\ & + \int \cos\alpha \cos\gamma \, d\sigma \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} uw \, dt + \int h \cos\alpha \, d\sigma \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} un \, dt \\ & + \int i \cos\alpha \, d\sigma \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} up \, dt + \int j \cos\alpha \, d\sigma \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} uq \, dt \\ & = \frac{1}{4} \int \cos^2\alpha \, d\sigma \frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda}. \end{aligned} \right.$$

En opérant maintenant sur chacune des variations δv, δw, δn, δp, δq comme on vient de le faire sur la variation δu, on arriverait semblablement à cinq équations analogues à l'équation (32) et de même forme, équations que, pour abréger, nous n'écrirons pas.

Si l'on examine l'ensemble des six équations ainsi formées, on constate qu'il s'y trouve vingt et une inconnues, savoir :

D'abord les six valeurs moyennes $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} u^2\,dt$, $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} v^2\,dt$, $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} w^2\,dt$, $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} n^2\,dt$, $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} p^2\,dt$, $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} q^2\,dt$ des carrés des vitesses u, v, w, n, p, q; puis les quinze valeurs moyennes $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} uv\,dt$, ..., $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} un\,dt$, ... des produits deux à deux de ces vitesses.

Il reste donc, pour dégager les valeurs des vingt et une inconnues, à trouver quinze autres équations.

Ces quinze équations s'obtiennent facilement en remarquant que, si l'on considère ce que devient dans un choc quelconque l'un des quinze

produits de vitesses précités, par exemple le produit uv, on a, d'après les formules et conventions des pages 406, 407, 417, pour variation ϑ_{uv} correspondante,

$$\vartheta_{uv} = \mathrm{M}uv - \mathrm{M}u_0v_0 = \mathrm{M}\left(u_0 + \frac{\varpi\cos\alpha}{\mathrm{M}}\right)\left(v_0 + \frac{\varpi\cos\beta}{\mathrm{M}}\right) - \mathrm{M}u_0v_0$$
$$= \varpi\left(u_0\cos\beta + v_0\cos\alpha + \frac{\varpi}{\mathrm{M}}\cos\alpha\cos\beta\right)$$
$$= \frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)}{1+\frac{m}{\mu}}\left[u\cos\beta + v\cos\alpha + \frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)}{\mathrm{M}\left(1+\frac{m}{\mu}\right)}\cos\alpha\cos\beta\right].$$

Mais, en vertu des raisonnements qui ont servi à établir, pages 425-426 ci-dessus, l'équation $\frac{1}{\mathrm{T}}\sum\vartheta_u = 0$ et aux mêmes conditions, on peut écrire

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\sum\vartheta_{uv} = 0.$$

Partant de là et opérant comme précédemment, on arrive sans peine à l'équation

$$(33)\quad \mathrm{M}\left\{\begin{aligned}&\int\cos\alpha\cos\beta\,d\sigma\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}u^2\,dt + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}v^2\,dt\right)\\ &+\left(\int\cos^2\alpha\,d\sigma + \int\cos^2\beta\,d\sigma\right)\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}uv\,dt\\ &+\int\cos\beta\cos\gamma\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}uw\,dt + \int\cos\alpha\cos\gamma\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}vw\,dt\\ &+\int h\cos\beta\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}un\,dt + \int h\cos\alpha\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}vn\,dt\\ &+\int i\cos\beta\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}up\,dt + \int i\cos\alpha\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}vp\,dt\\ &+\int j\cos\beta\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}uq\,dt + \int j\cos\alpha\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}vq\,dt\end{aligned}\right.$$
$$= \frac{1}{2}\int\cos\alpha\cos\beta\,d\sigma\,\frac{\Sigma\mathrm{N}m^2\lambda^3}{\Sigma\mathrm{N}m\lambda}.$$

Et, en considérant successivement chacun des quatorze autres pro-

duits de vitesses deux à deux, on obtiendrait de la même façon quatorze autres équations analogues à cette équation (33).

Les six équations (32) et les quinze équations (33) forment donc en définitive un système de vingt et une équations du premier degré par rapport aux vingt et une inconnues de la forme

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt,\quad \ldots,\quad \frac{1}{T}\int_0^T uv\,dt,\quad \ldots$$

qu'elles contiennent. Par conséquent, ces vingt et une équations admettent, en général, un seul système de solution.

Et cet unique système de solution qui apparaît immédiatement à la seule inspection des équations est le suivant :

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T Mu^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Mv^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Mw^2\,dt \\ &\quad = \frac{1}{T}\int_0^T An^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Bp^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Cq^2\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda}, \end{aligned}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T uv\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T uw\,dt = \ldots \\ &\qquad = \frac{1}{T}\int_0^T un\,dt = \ldots = \frac{1}{T}\int_0^T np\,dt = \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Des valeurs (34), on déduit

$$\frac{1}{T}\int_0^T M(u^2+v^2+w^2)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (An^2+Bp^2+Cq^2)\,dt = \frac{3}{4}\,\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda}$$

et, par suite, vu les définitions de la page 406,

$$(36)\qquad \frac{1}{T}\int_0^T MW^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I\omega^2\,dt,$$

$$(37)\qquad \frac{1}{T}\int_0^T (MW^2+I\omega^2)\,dt = \frac{3}{2}\,\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda}.$$

La relation (37) se traduit par le théorème suivant, analogue à celui

déjà trouvé (p. 423 ci-dessus) pour le cas particulier de la sphère homogène.

La valeur moyenne de la force vive totale d'un solide invariable en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide à points indépendants, infiniment divisé, est égale, quelles que soient la forme, *les* dimensions, *la* masse *du solide, à une quantité qui ne dépend que de la constitution du fluide.*

De la relation (36), on conclut que dans les mêmes conditions :

La force vive moyenne de translation du solide est égale à sa force vive moyenne de rotation.

On reconnaît, d'ailleurs, facilement que, comme cela doit être, les valeurs (34), (35) vérifient l'équation (28) de la page 422, en sorte que cette équation (28) est surabondante par rapport au système des équations (32), (33).

Lorsque (ainsi que cela arrive, par exemple, pour les ellipsoïdes homogènes) le solide considéré admet comme plans de symétrie les trois plans déterminés par ses axes principaux passant par son centre de gravité, les intégrales de la forme $\int \cos\alpha \cos\beta \, d\sigma$, ..., $\int h \cos\alpha \, d\sigma$, ... étant toutes nulles, les six équations (32) donnent immédiatement les six valeurs (34) des forces vives moyennes.

XII. *Valeurs moyennes des composantes des vitesses du solide.* — On peut, pour achever de bien définir le mouvement du solide M, remarquer que, si l'on considère les variations $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$, $n - n_0$, ... des composantes de vitesses u, v, w, n, p, q données par les formules (1) et (2), pages 401-402 ci-dessus, ces variations doivent, pour des raisons analogues à celles qui viennent d'être présentées pour les variations des forces vives et aux mêmes conditions, satisfaire à des équations de la forme

$$(38) \qquad \frac{1}{T}\sum \mathfrak{w}_u = 0, \qquad \frac{1}{T}\sum \mathfrak{w}_v = 0, \qquad \ldots,$$

$\mathfrak{w}_u$, $\mathfrak{w}_v$, ... désignant les variations $u - u_0$, $v - v_0$, ... en question.

En opérant sur ces équations (38), comme on l'a fait ci-dessus sur les équations (30), on arrive, par des calculs analogues, à trouver les relations

$$\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T v\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T w\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T n\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T q\,dt = 0.$$

et, par suite, vu l'équation (22), page 416,

$$\frac{1}{T}\int_0^T l\,dt = 0.$$

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME VII.

FIN DU TOME VII DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

16758 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.



